

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

HÀ DUY NGHĨA

CÁC ĐIỀU KIỆN $C_i, i = 1, 2, 3$

TIỂU LUẬN LÝ THUYẾT VÀNH

Quy nhơn, tháng 12 năm 2009

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

HÀ DUY NGHĨA

CÁC ĐIỀU KIỆN $C_i, i = 1, 2, 3$

CAO HỌC TOÁN KHÓA 11

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

TIỂU LUẬN LÝ THUYẾT VÀNH

Người hướng dẫn khoa học

TS. MAI QUÝ NĂM

Quy nhơn, tháng 12 năm 2009

MỤC LỤC

Trang phụ bìa	i
Mục lục	1
Lời mở đầu	2
Chương 1 MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ SỞ	3
1.1 Một số khái niệm và ví dụ	3
1.2 Một số tính chất	4
Chương 2 CÁC ĐIỀU KIỆN C_i	8
2.1 Các khái niệm	8
2.1.1 Các điều kiện $C_i, i = 1, 2, 3$	8
2.1.2 Môđun liên tục	8
2.2 Các tính chất	8
Kết luận	15
Tài liệu tham khảo	16

LỜI MỞ ĐẦU

Cùng với sự phát triển của toán học hiện đại nói chung, lý thuyết môđun đã được các nhà toán học quan tâm và đã đạt được nhiều kết quả xuất sắc.

Vào năm 1977, Chatters và Hajarnavis đưa ra khái niệm CS-môđun (Extending Môđun). Khi lớp CS-môđun ra đời thì lý thuyết môđun đã được phát triển mạnh mẽ và có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết vành.

Việc nghiên cứu các môđun thỏa điều kiện C_i , ($i = 1, 2, 3$) là nền tảng cho việc nghiên cứu các CS- môđun và các lớp môđun khác, cho nên tôi chọn đề tài nghiên cứu các môđun thỏa điều kiện C_i , ($i = 1, 2, 3$) làm đề tài tiểu luận kết thúc bộ môn.

Tiểu luận gồm hai chương cùng với phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày các định nghĩa, ví dụ và các tính chất cơ bản có liên quan đến chương sau của tiểu luận.

Chương 2: Trình các kết quả các môđun con đóng, môđun đều (*uniform*) thỏa điều kiện C_1 , hạng tử trực tiếp của môđun thỏa điều kiện C_i , ($i = 1, 2, 3$) cũng là môđun thỏa điều kiện C_i , ($i = 1, 2, 3$). Đặc biệt ở các Mệnh đề 2.2.4, 2.2.5 cho ta lớp những môđun thỏa điều kiện C_i , ($i = 1, 2$).

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng trong học tập, nghiên cứu và được sự hướng dẫn nhiệt tình của thầy giáo hướng dẫn, nhưng do năng lực của bản thân và thời gian còn hạn chế nên tiểu luận khó tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn để tiểu luận được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn TS. Mai Quý Năm người đã tận tình giúp đỡ, cùng tập thể lớp cao học toán khoá 11 tạo điều kiện cho tôi hoàn thành tiểu luận này.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ SỞ

Trong toàn bộ tiểu luận, vành luôn được xét là vành kết hợp có đơn vị ký hiệu 1 và các môđun là các môđun phải Unita trên vành nào đó, thông thường xét vành R và một môđun trên vành R gọi là R - môđun .

1.1 Một số khái niệm và ví dụ

Định nghĩa 1.1.1. Cho môđun M và $N \subseteq M$. Môđun con N được gọi là cốt yếu trong M , ký hiệu là $N \subseteq^* M$, nếu $N \cap K \neq 0$ với mọi môđun con khác không K của M .

Nếu N là môđun con cốt yếu của M , thì ta nói rằng M là mở rộng cốt yếu của N .

Ví dụ 1.1.2. Môđun $M \subseteq^* M; n\mathbb{Z} \subseteq^* \mathbb{Z}, \forall n \neq 0$.

Định nghĩa 1.1.3. Môđun U được gọi là *môđun đều (uniform)* nếu bất kỳ môđun con A và B khác 0 của U thì $A \cap B \neq 0$, hay mọi môđun con khác không của U là môđun cốt yếu trong U .

Ví dụ 1.1.4. \mathbb{Z} môđun \mathbb{Z} là đều vì bất kỳ $0 \neq A, B \subseteq \mathbb{Z}$ thì $A = n\mathbb{Z}, b = m\mathbb{Z}$, với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $A \cap B = [m, n]\mathbb{Z} \neq 0$

Định nghĩa 1.1.5. Cho môđun M và $N \subseteq M$ được gọi là *đóng* trong M nếu N không có mở rộng thật sự trong M . Nói cách khác N được gọi là đóng trong M nếu mọi môđun con $K \neq 0$ của M mà $N \subseteq K$ thì $K = N$.

Ví dụ 1.1.6. A và B là hai môđun con của M thỏa mãn $M = A \oplus B$ thì môđun B là đóng trong M .

Định nghĩa 1.1.7. Cho môđun M và $N \subseteq M$. Môđun con K của M được gọi là *bao đóng* của môđun con N trong M nếu K là môđun con tối đại trong M sao cho $N \subseteq^* K$.

Ví dụ 1.1.8. \mathbb{Z} -môđun $2\mathbb{Z}$ có bao đóng là \mathbb{Z} .

Định nghĩa 1.1.9. Cho môđun M và $N, H \subseteq M$.

(1.) Môđun H được gọi là phần bù giao của N trong M nếu H là môđun tối đại trong các môđun con của M thỏa $H \cap N = 0$.

(2.) Môđun con N^* của M được gọi là phần bù cộng tính đối với N trong M nếu $N + N^* = M$ và N^* là môđun con tối tiểu có tính chất $N + N^* = M$

Định nghĩa 1.1.10. Một môđun M khác không được gọi là môđun đơn trong trường hợp nó không có những môđun con không tầm thường.

Định nghĩa 1.1.11. Cho A, N là những môđun. Môđun N được gọi là A -nội xạ nếu với mọi môđun con B của A và đồng cấu $f : B \rightarrow N$, tồn tại đồng cấu $h : A \rightarrow N$ sao cho $h(x) = f(x), \forall x \in B$. Nói cách khác là nếu với mọi môđun con B của A và đồng cấu $f : B \rightarrow N$ có thể mở rộng thành đồng cấu $h : A \rightarrow N$. Nghĩa là biểu đồ sau là giao hoán

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i} & A \\ & & \downarrow f & \nearrow h & \\ & & N & & \end{array}$$

Một môđun Q được gọi là tự nội xạ nếu Q là Q -nội xạ.

1.2 Một số tính chất

Mệnh đề 1.2.1. Bao đóng của một môđun luôn tồn tại.

Chứng minh. Gọi N là môđun con M , ta chứng minh tồn tại bao đóng của N trong M . Đặt $S = \{K \subseteq M | N \subseteq^* K\}$, khi đó ta có:

S Khác rỗng vì $H \in S$.

Sắp thứ tự S theo quan hệ bao hàm, Gọi Γ là tập con sắp thứ tự tuyến tính của S . Đặt $A = \bigcup_1^\infty K_i$ ta thấy A là cận trên của Γ , ta chứng minh $A \in S$ tức là $H \subseteq A$. Thật vậy lấy $x \in A, x \neq 0$ suy ra tồn tại n để $x \in K_n$ mà $H \subseteq^* K_n$ nên suy ra $Rx \cap H \neq 0$ suy ra $H \subseteq^* A$, vậy mỗi tập con sắp thứ tự tuyến tính đều có cận trên. Theo bổ đề Zorn S có phần tử tối đại K , ta chứng minh K là bao đóng của H . Do $K \in S$ suy ra $H \subseteq^* K$, nếu tồn tại $B \subset M$ sao cho $K \subseteq^* B$ do đó $B \in S$ điều này mâu thuẫn với giả thiết tính tối đại của K suy ra $B = K$. \square

Mệnh đề 1.2.2. Cho môđun N là A -nội xạ. Nếu $B \subseteq A$ thì N là B -nội xạ và N là A/B -nội xạ.

Chứng minh. Chia làm 2 phần sau:

i) Chứng minh N là B -nội xạ.

Với mọi môđun $X \subseteq B$ ta có $X \subseteq A$. Mà N là A -nội xạ nên mỗi đồng cấu $\varphi : X \rightarrow N$ luôn mở rộng thành đồng cấu $h : A \rightarrow N$ sao cho $\alpha = h \circ i$ (trong đó i là phép nhúng). Chọn $\psi : B \rightarrow N$, sao cho $\psi = h \circ i$. Khi đó ψ là một mở rộng của φ nên N là B -nội xạ. (Mô tả bởi sơ đồ sau)

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{i} & A \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & & \nearrow \exists h & \\ N & & & & \end{array}$$

ii) Chứng minh N là A/B -nội xạ.

Giả sử X/B là môđun con của A/B và $\varphi : X/B \rightarrow N$ là đồng cấu bất kỳ. Gọi π là đồng cấu tự nhiên từ A vào A/B , $\pi' = \pi|_X$, ta xét biểu đồ sau :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & A \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ X/B & \xrightarrow{\theta} & A/B \\ \varphi \downarrow & \nearrow \exists \psi & \\ N & & \end{array}$$

Vì N là A nội xạ nên tồn tại $\theta : A \longrightarrow N$ sao cho $\varphi\pi' = \theta i$, ta có $B \subseteq A$ và $\theta(B) = \theta.i(B)$. Vậy $B \subseteq \text{Ker}\theta$ hay $\text{Ker}\pi \subseteq \text{Ker}\theta$. Do π là toàn cấu nên ta có thể chọn $\psi : A/B \longrightarrow N$ sao cho $\psi\pi = \theta$.

Với $x \in X$ thì $x \in A$ ta có

$$\psi(x + B) = \psi[\pi(x)] = \psi\pi(x) = \theta(x) = \theta i(x) = \varphi\pi'(x) = \varphi(x + B)$$

Vậy ψ là mở rộng của φ hay N là A/B -nội xạ. \square

Mệnh đề 1.2.3. Nếu K là môđun con của M và L là phần bù giao của K , khi đó

- (1) L là môđun con đóng trong M .
- (2) $L \oplus K$ là môđun con cốt yếu của M .
- (3) $(L \oplus K)/L \subseteq^* M/L$.

Chứng minh. (1) Chứng minh L đóng trong M .

Thật vậy, gọi N là môđun con của M sao cho $L \subseteq^* N$. Nếu $N \neq L$ thì $L \cap K = 0$, L tối đại nên $N \cap K \neq 0$. Mà $N \cap K \subseteq N, L \subseteq^* N$ nên

$$(N \cap K) \cap L = N \cap (K \cap L) \neq 0.$$

Vì $K \cap L = 0$ nên ta có điều vô lý.

Do đó $N = L$, hay L là môđun con đóng trong M .

(2) Ta chứng minh $L \oplus K \subseteq^* M$. Thật vậy, lấy $0 \neq N \subseteq M$, nếu $N \cap (K \oplus L) = 0$ thì $N \cap K = 0, N \cap L = 0$, do đó $(N \oplus L) \cap K = 0$. Và như vậy theo tính tối đại của L thì $N \oplus L = L$ hay $N = 0$. Điều này mâu thuẫn giả thiết $0 \neq N$.

Vậy $N \cap (K \oplus L) \neq 0$, hay $L \oplus K \subseteq^* M$.

- (3) Chứng minh $(L \oplus K)/L \subseteq^* M/L$.

Gọi $Y/L \neq 0$ là môđun con của M/L , giả sử $Y/L \cap (L \oplus K)/L = 0$, vì $Y/L \neq 0$ nên $Y \neq L$ do đó $Y \cap K \neq 0$, xét $0 \neq a \in Y \cap K$ khi đó

$$a + L \in Y/L, a + L \in (L \oplus K)/L$$

suy ra

$$\begin{aligned} a + L &\in Y/L \cap (C \oplus K)/L \\ \Rightarrow a + L &= \bar{0} \Rightarrow a \in L \Rightarrow a \in K \cap L = 0 \end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn.

Vậy $(L \oplus K)/L \subseteq^* M/L$. □

Mệnh đề 1.2.4. Gọi $G = \prod_{i \in I} G_i$ và M là những môđun, khi đó G là M -nội xạ nếu và chỉ nếu G_i là M -nội xạ với mỗi $i \in I$.

Mệnh đề 1.2.5. Cho M là một môđun tựa nội xạ, Nếu bao nội xạ $I(M) = \bigoplus_{i \in I} K_i$ thì $M = \bigoplus_{i \in I} (M \cap K_i)$.

Chương 2

CÁC ĐIỀU KIỆN $C_i, i = 1, 2, 3$

2.1 Các khái niệm

2.1.1 Các điều kiện $C_i, i = 1, 2, 3$

Điều kiện C_1 : Với mỗi môđun con A của M , tồn tại một hạng tử trực tiếp M_1 của M chứa A và A là cốt yếu trong M_1 .

Điều kiện C_2 : Nếu một môđun con A của M đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của M thì A cũng là hạng tử trực tiếp của M .

Điều kiện C_3 : Nếu M_1 và M_2 là những hạng tử trực tiếp của M sao cho $M_1 \cap M_2 = 0$ thì $M_1 \oplus M_2$ cũng là hạng tử trực tiếp của M .

2.1.2 Môđun liên tục

Định nghĩa 2.1.1. Môđun M được gọi là liên tục nếu nó thỏa điều kiện C_1 và C_2 .

Định nghĩa 2.1.2. Môđun M được gọi là tựa liên tục (quasi-continuous) nếu nó thỏa điều kiện C_1 và C_3 .

2.2 Các tính chất

Mệnh đề 2.2.1. Môđun M thỏa điều kiện C_1 khi và chỉ khi mọi môđun con đóng trong M đều là hạng tử trực tiếp.

Chứng minh. (\Rightarrow) Gọi A là môđun con đóng của M , vì M thỏa điều kiện C_1 nên tồn tại B là môđun con của M sao cho $B \subseteq^\oplus M, A \subseteq^* B$, ngoài ra do A đóng nên $A = B$. Từ đó suy ra $A \subseteq^\oplus M$.

(\Leftarrow) Chứng minh nếu mọi môđun con đóng trong M đều là hạng tử trực tiếp thì M thỏa điều kiện C_1 .

Thật vậy, với mọi môđun con B khác 0 của M , luôn tồn tại bao đóng \overline{B} của B , khi đó \overline{B} là môđun con tối đại, do đó \overline{B} đóng trong M , mà theo giả thiết mọi môđun con đóng đều là hạng tử trực tiếp nên ta suy ra \overline{B} là hạng tử trực tiếp của M .

Suy ra M thỏa điều kiện C_1 . □

Mệnh đề 2.2.2. *Môđun không phân tích được M thỏa điều kiện C_1 khi và chỉ khi M đều.*

Chứng minh. (\Rightarrow) Giả sử A, B là hai môđun con tùy ý của M , $A, B \neq 0$, theo giả thiết M thỏa điều kiện C_1 nên tồn tại M_1, M_2 là hạng tử trực tiếp của M sao cho $A \subseteq^* M_1, B \subseteq^* M_2$. Vì M không tách được nên $M_1 = M_2 = M$, suy ra $A \subseteq^* M$ do đó $A \cap B \neq 0$. Vậy M đều.

(\Leftarrow) Giả sử M đều ta cần chứng minh M không phân tích được và thỏa điều kiện C_1 . Với mọi môđun con A, B của M và $A \cap B \neq 0$ khi đó theo giả thiết M đều nên $A \subseteq^* M, B \subseteq^* M$. Suy ra M thỏa điều kiện C_1

Bây giờ ta chứng minh M không phân tích được, giả sử $M = C \oplus D$, khi đó $C \cap D = 0$, điều này mâu thuẫn M đều.

Vậy M không phân tích được. □

Mệnh đề 2.2.3. *Giả sử M là môđun nào đó, khi đó ta có:*

i) Cho A là môđun con tùy ý của M , nếu A đóng trong hạng tử trực tiếp của M thì A đóng trong M .

ii) Mọi hạng tử trực tiếp của M đóng trong M .

Chứng minh. Giả sử $M = M_1 \oplus M_2$ và A môđun con đóng trong M_1 ta cần chứng minh A đóng trong M . Thật vậy, xét phép chiếu $\pi : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1$. Giả sử $A \subseteq^* B \subseteq M$ ta cần chứng minh $A = B$. Ta có $A \subseteq M_1$ suy ra $A \cap M_2 = 0$, vì thế $\pi|_A$ là đơn cấu. Do đó $A = \pi(A) \subseteq^* \pi(B) \subseteq M_1$. Vì A đóng trong M_1

nên $\pi(B) = A \subseteq B$ cho nên $(1 - \pi)B \subseteq B$, suy ra $(1 - \pi)B \cap A = 0$ mà ta có $A \subseteq^* B$ suy ra $(1 - \pi)B = 0$, hay $B = \pi(B) \subseteq M_1$, do A đóng trong M_1 nên ta có $A = B$. Vậy A đóng trong M .

ii) Giả sử A là hạng tử trực tiếp của M ta có $M = A \oplus B$, lấy $N \subseteq M$ sao cho $A \subseteq^* N$, khi đó $A \cap B \subseteq^* N \cap B$. Từ đó $0 \subseteq^* N \cap B$ suy ra $N \cap B = 0$. Xét phép chiếu $\pi : A \oplus B \rightarrow A$ ta có $\text{Ker}(\pi) = B$ mà $N \cap B = 0$ nên $N \cap \text{Ker}(\pi) = 0$ suy ra $\pi|_N$ là đơn cấu. Vì thế N nhúng đơn cấu vào môđun A mà $A \subseteq N$ nên $A = N$.

Vậy A đóng trong M . □

Mệnh đề 2.2.4. *Môđun nội xạ thỏa mãn điều kiện C_1 .*

Chứng minh. Giả sử Q là môđun nội xạ, gọi A là môđun con tùy ý của Q ta phải chứng minh tồn tại trong Q một môđun Q_1 sao cho $Q_1 \subset^\oplus Q$ và $A \subseteq^* Q_1$.

Thật vậy, gọi A' là bù giao của A trong Q , và Q_1 là bù giao của A' trong Q . Khi đó ta có $A \cap A' = 0$ và $Q_1 \cap A' = 0$, do đó $A \subset Q_1$ và với mọi môđun con B của Q_1 ta có $A \cap B \neq 0$ ($A \cap B = 0 \Rightarrow B \subset A'$). Suy ra $A \subseteq^* Q_1$.

Bây giờ ta xét biểu đồ :

$$\begin{array}{ccc} Q_1 \oplus A' & \xrightarrow{i} & Q \\ \beta \downarrow & \searrow \beta & \\ Q/A' \oplus Q/Q_1 & & \end{array}$$

trong đó i là đơn cấu chính tắc, còn α, β được xác định như sau:

Với $x + y \in Q_1 \oplus A'$ thì $\alpha(x + y) = (x + y + A', x + y + Q_1) = (x + A', y + Q_1)$.

Với $q \in Q$ thì $\beta(q) = (q + A', q + Q_1)$.

Khi đó biểu đồ là giao hoán, tức là $\alpha i = \beta$ và $\text{Im} \beta \subset \text{Im} \alpha$.

Ngoài ra α là một đơn cấu. Thật vậy, giả sử $\alpha(q_1) = \alpha(q_2)$ điều này tương đương

$$\begin{aligned} (q_1 + A', q_1 + Q_1) &= (q_2 + A', q_2 + Q_1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 - q_2 \in A' \\ q_1 - q_2 \in Q_1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow q_1 - q_2 \in Q_1 \cap A' = 0 \\ &\Rightarrow q - 1 = q_2. \end{aligned}$$

Vậy α đơn cấu và từ đó suy ra β cũng đơn cấu (i đơn cấu).

Vì Q nội xạ nên α chẻ ra tức là $Im\alpha \subseteq^{\oplus} Q/A' \oplus Q/Q_1$ ngoài ra theo Mệnh đề 1.2.3 ta có được:

$$\begin{aligned} (Q_1 \oplus A')/A' &\subseteq^* Q/A' \\ (Q_1 \oplus A')/Q_1 &\subseteq^* Q/Q_1 \end{aligned}$$

do đó

$$Im\beta \subseteq^* Q/A' \oplus Q/Q_1$$

suy ra

$$Im\alpha \subseteq^* Q/A' \oplus Q/Q_1$$

từ các kết quả trên ta có được

$$Im\alpha = Q/A' \oplus Q/Q_1$$

tức là α là đẳng cấu.

Khi đó với mỗi $q \in Q$ suy ra $(q + A', 0 + Q_1) \in Q/A' \oplus Q/Q_1$ do đó luôn tồn tại $q_0 \in Q$ sao cho

$$(q + A', 0 + Q_1) = (q_0 + A', q_0 + Q_1)$$

suy ra

$$\begin{cases} q_0 \in Q_1 \\ q - q_0 \in A' \end{cases}$$

suy ra

$$q \in Q_1 + A' \Rightarrow Q \subset Q_1 + A'$$

Mặt khác ta có $Q_1 + A' \subset Q$ và $Q_1 \cap A' = 0$ nên ta suy ra

$$Q = Q_1 \oplus A'$$

□

Mệnh đề 2.2.5. *Môđun tựa nội xạ là môđun liên tục.*

Chứng minh. Gọi M là môđun tựa nội xạ, Nếu $N \subseteq M$ thì bao nội xạ $I(M)$ của M chứa bao nội xạ $I(N) = E$ của N và $I(M) = E \oplus G$ với mỗi môđun con G , nhưng theo Mệnh đề 1.2.4 ta có $M = (M \cap E) \oplus (M \cap G)$. Ngoài ra, $N \subseteq^* E$ nên $N \subseteq^* (M \cap E)$. Điều này chứng tỏ M thỏa mãn điều kiện C_1 .

Bây giờ ta chứng minh M thỏa điều kiện C_2 . Thật vậy, gọi A là môđun con của M và là hạng tử trực tiếp của M , ta có $M = A \oplus A'$, gọi π, i lần lượt là các phép chiếu:

$$\pi : A \oplus A' \longrightarrow A, i : A \longrightarrow M$$

gọi $f : A \longrightarrow M$ là đơn cấu và đặt $N = f(A)$

xét sơ đồ:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{i} M \\ & & \downarrow f \quad \nearrow h \\ & & M \end{array}$$

theo giả thiết ta có M là tựa nội xạ nên tồn tại $h : M \longrightarrow M$ sao cho $hf = i$. Khi đó $\pi hf = 1_A$. Do đó N là hạng tử trực tiếp của M .

Bây giờ giả sử rằng $N \cong P \subseteq^\oplus M$. Từ M là M -nội xạ, nên theo Mệnh đề 1.2.4 ta suy ra P là P -nội xạ, và do đó N là M -nội xạ. Khi đó ánh xạ đồng nhất $1_N : N \longrightarrow N$ có thể mở rộng thành đồng cấu $\lambda : M \longrightarrow N$, và do đó nó chẻ ra, tức là $M = N \oplus \text{Ker}(\lambda)$.

Vậy M thỏa điều kiện C_2 . □

Mệnh đề 2.2.6. *Hạng tử trực tiếp của môđun tựa nội xạ là môđun tựa nội xạ.*

Chứng minh. Giả sử $M = N \oplus N'$ ta cần chứng minh N là tựa nội xạ. Thật vậy, do M là tựa nội xạ nên với mỗi X là môđun con của N , và đồng cấu

$g : X \longrightarrow N$ luôn mở rộng thành đồng cấu $f : M \longrightarrow M$ xét theo sơ đồ

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\theta} & N \oplus N' \\
 g \downarrow & \swarrow \lambda & \\
 N & & \\
 \pi \uparrow & \searrow f & \\
 N \oplus N' & &
 \end{array}$$

Gọi $\pi : M \longrightarrow N$ khi đó $\text{Ker}(\pi) = N'$, khi đó $\lambda = (\pi \circ f)|_N$ là một tự đồng cấu của N và λ là mở rộng của g .

Vậy N là tựa nội xạ.

□

Mệnh đề 2.2.7. Nếu môđun M thỏa điều kiện C_2 thì M thỏa điều kiện C_3 .

Chứng minh. Gọi $N \subseteq^\oplus M, K \subseteq^\oplus M$ thỏa mãn $N \cap K = 0$, ta cần chứng tỏ rằng $N \oplus K \subseteq^\oplus M$. Vì $N \subseteq^\oplus M$ nên ta giả sử $M = N \oplus N'$ và gọi $\pi : M \longrightarrow N'$ là phép chiếu với $\text{Ker}(\pi) = N$. Nếu $k \in K$ và $k = n + n', n \in N, n' \in N'$ thì $\pi(k) = n'$, do đó $N \oplus K = N \oplus \pi(K)$. Bây giờ ta cần chứng minh $N \oplus \pi(K) \subseteq^\oplus M$. Thật vậy $\pi|_K : K \longrightarrow M$ là đơn cấu, ngoài ra theo giả thiết M thỏa mãn điều kiện C_2 nên $\pi(K) \subseteq^\oplus M$, từ $\pi(K) \subseteq N'$ nên suy ra $N' = \pi(K) \oplus W$, với W là một môđun nào đó. Từ đó suy ra rằng $M = N \oplus \pi(K) \oplus W$.

Vậy M thỏa điều kiện C_3 .

□

Hệ quả 2.2.8. Nếu M thỏa mãn điều kiện $C_i, i = 1, 2, 3$ và N là hạng tử trực tiếp của M thì N cũng thỏa mãn điều kiện $C_i, i = 1, 2, 3$.

Chứng minh. Hệ quả này được suy ra trực tiếp từ Mệnh đề 2.2.6 và 2.2.7. □

Mệnh đề 2.2.9. Giả sử N, A là những môđun và $I(A), I(N)$ theo thứ tự là bao nội xạ của N và A , khi đó N là A -nội xạ khi và chỉ khi $f(A) \subset N$ với mọi đồng cấu $f : I(A) \longrightarrow I(N)$.

Chứng minh. Vì $I(N)$ là môđun nội xạ nên mỗi đồng cấu $f \in \text{Hom}(I(A), I(N))$ đều là một mở rộng của $\psi \in \text{Hom}(A, I(N))$, do đó không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét $f \in \text{Hom}(A, I(N))$.

(\Leftarrow) Chứng minh N là A -nội xạ. Gọi X là môđun con của A và đồng cấu $g : X \rightarrow N$ ta cần chứng minh tồn tại đồng cấu $h : A \rightarrow N$ là mở rộng của g tức là $h\theta = g$ trong đó $\theta : X \rightarrow A$ là đơn cấu. Thật vậy, xét biểu đồ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\theta} & A \\ g \downarrow & \swarrow h & \\ N & & \\ i \downarrow & \swarrow f & \\ I(N) & & \end{array}$$

vì $I(N)$ là môđun nội xạ nên với mỗi đồng cấu g và đơn cấu θ luôn tồn tại đồng cấu f sao cho $gi = f\theta$. Ngoài ra theo giả thiết $f(A) \subset N$ nên $f : A \rightarrow N$ là mở rộng của g .

Vậy N là A -nội xạ.

(\Rightarrow) Chứng minh $f(A) \subset N$ với mỗi $f \in \text{Hom}(A, I(N))$. Thật vậy, gọi $X = \{a \in A : f(a) \in N\}$, từ N là nội xạ $f|_X$ có thể mở rộng thành $g : X \rightarrow N$ theo sơ đồ:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\theta} & A \\ f|_X \downarrow & \swarrow g & \\ N & & \\ i \downarrow & \swarrow f & \\ I(N) & & \end{array}$$

khi đó $N \cap (g - f)A = 0$. Thật vậy, lấy $n \in N, a \in A$ sao cho $n = (g - f)A$. Suy ra $f(a) = g(a) - n \in N$ do đó $a \in X$ nên $n = g(a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$, tức là $N \cap (g - f)A = 0$. Suy ra $(g - f)A = 0$ ($N \subseteq^* I(N)$).

Do vậy $f(A) = g(A) \subset N$.

Từ mệnh đề trên ta có thể suy ra môđun Q là tựa nội xạ khi và chỉ khi $f(Q) \subset Q$ với mọi đồng cấu f của $I(Q)$. \square

KẾT LUẬN

Trong tiểu luận "*Môđun thỏa điều kiện $C_i (i = 1, 2, 3)$* " tác giả đã tìm hiểu và hệ thống hóa các kết quả sau:

1. Trình bày các điều kiện $C_i (i = 1, 2, 3)$ và nêu những môđun thỏa điều kiện $C_i (i = 1, 2, 3)$, giới thiệu môđun liên tục, tựa liên tục.

2. Hệ thống mối liên hệ giữa các điều kiện đó, cụ thể như môđun thỏa điều kiện C_2 thì thỏa điều kiện C_3 , đặc biệt là môđun nội xạ thì thỏa điều kiện C_1 và môđun tựa nội xạ thì thỏa điều kiện C_1 và C_2, \dots

Trong tiểu luận, Mệnh đề 2.2.1; 2.2.2; 2.2.3; 2.2.4 là phần tác giả trình bày, các Mệnh đề còn lại tham khảo ở tài liệu [2],[3] .

Trong khuôn khổ một tiểu luận và hạn chế về thời gian cũng trình độ nên nhiều vấn đề chưa được trình bày, chẳng hạn như về mối liên hệ giữa môđun nội xạ, môđun tựa nội xạ, môđun liên tục, tựa liên tục... Trong thời gian đến tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu và bổ sung. Mặc dù thật cố gắng nhưng sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong được lượng thứ, chỉ bảo của Thầy cô giáo và các bạn để bài tiểu luận hoàn thiện hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Tiến Quang, Nguyễn Duy Thuận- *Cơ sở lý thuyết môđun và vành*. Nhà xuất bản giáo dục, Hà Nội, 2001.
2. S.H.Mohamed and Müller, *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Not 147, Cambridge, 1990.
3. N.K.Nichol Son and M.F.Yousif *Quasi-probenius Ring*, Cambridge Univ. Press, 2003.