BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

****

HÀ DUY NGHĨA

ĐỊNH LÝ CHUẨN BỊ WEIERSTRASS VÀ ỨNG DỤNG

TIỂU LUẬN LÝ THUYẾT KỲ DỊ

Quy Nhơn, Tháng 5 năm 2010

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

****

HÀ DUY NGHĨA

ĐỊNH LÝ CHUẨN BỊ WEIERSTRASS VÀ ỨNG DỤNG

CAO HỌC TOÁN KHÓA 11
Chuyên ngành: **Đại số và lý thuyết số**

TIỂU LUẬN LÝ THUYẾT KỲ DỊ

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN CÔNG TRÌNH

Quy Nhơn, Tháng 5 năm 2010

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Cấu trúc tôpô của đường cong phẳng là một chuyên đề toán học được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và có nhiều kết quả hay, cụ thể là nó thể hiện trong nhiều tài liệu như cuốn Plane Algebraic Curves của tác giả Brieskorn, cuốn Introduction to algebraic curves của tác giả Griffiths ...

Đối với bản thân tôi là học viên cao học, tôi chọn đề tài tiểu luận" Định lý chuẩn bị Weierstrass và ứng dụng " nhằm tìm hiểu sâu hơn về vấn đề tham số hóa của đường cong cũng như sự phân tích của đường cong tổng quát thành các đường cong bất khả quy,.. nhằm để kết thúc bộ môn Lý thuyết kỳ dị. Tiểu luần gồm 2 chương cùng với phần mở đầu và kết luận.

Chương 1: Nói về định lý chuẩn bị Weierstrass, các định lý chia đa thức và mối liên hệ giữa chúng.

Chương 2: Là phần ứng dụng của định lý chuẩn bị cho việc chứng minh một đường cong tổng quát nào đó đều có thể tham số hóa được.

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng trong học tập, nghiên cứu và được sự hướng dẫn nhiệt tình của thầy giáo hướng dẫn, nhưng do năng lực của bản thân và thời gian còn hạn chế nên tiểu luận khó tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn để tiểu luận được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn TS Lê Công Trình người đã tận tình giúp đỡ, cùng tập thể lớp cao học toán khoá 11 tạo điều kiện cho tôi hoàn thành tiểu luận này.

Quy Nhơn, tháng 5 năm 2010

Hà Duy nghĩa

Chương 1

ĐỊNH LÝ CHUẨN BỊ WEIERSTRASS

Trong chương này phần 1.1 Đa thức Weierstrass được trình bày theo tài liệu [2],phần 1.2 Định lý chuẩn bị Weierstrass trình bày theo tài liệu[1].

1.1 Đa thức Weierstrass

Gọi $C\{x\}$, $(C\{x,y\})$ tương ứng là vành các hàm chỉnh hình trên lân cận của $0 \in \mathbb{C}(0;0) \in \mathbb{C}^2$ nghĩa là

$C\{x\} = \{$Các chuỗi lũy thừa hội tụ có dạng $f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\}$
$C\{x,y\} = \{$Các chuỗi lũy thừa hội tụ có dạng$f = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n\}$

trong đó mỗi chuỗi lũy thừa có thể có bán kính hội tụ khác nhau.

Định nghĩa 1.1.1. Đa thức $w \in C\{x,y\}$ gọi là đa thức Weierstrass theo biến y ($y-$tổng quát) nếu

$$w = y^d + a_1(x).y^{d-1} + ... + a_d(x). \tag{1.1}$$

trong đó $a_j(x) \in C\{x\}, a_j(0) = 0, (j = 1, ..., d)$.

Nhận xét: Giả sử $f \in C\{x,y\}$ khác đơn vị và $f(0,y)$ không đồng nhất 0, ta có thể viết:

$$f(0,y) = by^d + b_1 y^{d-1} + ...$$

trong đó $b \neq 0, d \geq 1$. Từ thực tế, phần tử không của$f(0,y)$ là phần tử cô lập, nên ta giả sử rằng trong miền $|y| < \varepsilon$. $f(0,y)$ không chứa phần tử không ngay cả $y = 0$. Do đó ta giả sử trong đường tròn $|y| = \varepsilon$ có $|f(0,y)| \geq c > 0$. Do đó, với mỗi ρ đủ nhỏ, $\rho > 0, |x| < \rho$ và $|y| = \varepsilon$ ta suy ra $f(x,y) \geq {}^{c}\!/_{2} > 0$.

Bổ đề 1.1.2. *Với những điều kiện như trên và với $|x| < \rho$ thì $f(x, y)$ và một hàm theo y có số các không điểm như nhau trên miền $|y| < \varepsilon$.*

Chứng minh. Bổ đề này suy trực tiếp từ nguyên lý argument trong giải tích phức. □

Do vậy với mỗi x cố định ($|x| < \varepsilon$) giả sử $y_\nu(x)(\nu = 1, ..d)$ là d không điểm của$f(x, y) = 0$, ta xây dựng đa thức:

$$w(x, y) = \prod_{\nu=1}^{d}(y - y_0(x))$$
$$= y^d + .. + a_1(x)y^{d-1} + .. + a_d(x)$$

trong đó:

$$a_1(x) = -\sum_{\mu=1}^{d} y_\mu(x)$$
$$a_2(x) = -\sum_{1<\mu<0\leq d}^{d} y_\mu(x)y_\nu(x)$$
$$.................$$

là những hàm đố xứng sơ cấp theo $y_\nu(x)(\nu = 1, ...d)$.

Bổ đề 1.1.3. *Đa thức $w(x, y)$được xây dựng như trên là đa thức Weierstrass.*

Chứng minh. Ta biết rằng mỗi hàm đối xứng sơ cấp có thể biểu diễn bởi một đa thức Newtơn đối xứng

$$\mathrm{a}_1(x) = -\delta(x)$$
$$a_2(x) = \frac{1}{2}[(\delta_1(x))^2 - \delta_{2(x)}]$$
$$...................$$

trong đó:

$$\delta_1(x) = \sum_\mu y_\mu(x)$$
$$\delta_2(x) = \sum_\mu (y_\mu(x))^2$$
$$............................$$
$$\delta_d(x) = \sum_\mu (y_\mu(x))^d$$

là những đa thức Newtơn đối xứng theo $y_\mu(x), (\mu = 1, .., d)$..

Do vậy, chúng ta cần chứng minh rằng mỗi $\delta_k(k = 1, ..d)$ là hàm chỉnh hình theo x. Thật vậy, điều này suy trực tiếp từ định lý thặng dư cho biểu diễn của

$$\delta_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|y|=\varepsilon} y^k \frac{f_y(x,y)}{f.(x,y)} dy.$$

□

1.2 Định lý chuẩn bị Weierstrass

Bổ đề 1.2.1 (Special division theorem ,[1] p.340)**.**

Gọi $p_k(t,y) \in \mathbb{C}\{y_1,..,y_k\}[t]$ *là đa thức* $k-$*tổng quát, tức là*

$$p_k(t,y) = t^k + \sum_{i=1}^{k} y_i t^{k-i}$$

Khi đó mỗi $f(t,z,y) \in \mathbb{C}\{t,y,z\}$ *tồn tại* $q \in \mathbb{C}\{t,z,y\}$ *và đa thức* $r(t,y,z) = \sum\limits_{i=1}^{k} A_i(z,y).t^{k-i}$ *bậc* $\leqslant k-1$ *trên* $\mathbb{C}\{z,y\}$ *sao cho*

$$f = q.p_k + r.$$

Chứng minh. Phép chứng minh chia làm 3 bước:

Bước 1:Chứng minh trường hợp $p_k = t - x_i$ tức là ta phải chứng minh với mỗi $\in \mathbb{C}\{t,z,x_1,...,x_k\}$ luôn tồn tại $Q \in \mathbb{C}\{t,z,x\}$ và $R \in \mathbb{C}\{z,x\}$ sao cho

$$F = Q(t-x_i) + R.$$

Thật vậy, nếu đặt $R(z,x) := F(x_i,z,x)$ thì $t-x_i$ chia hết chuỗi $F-R = F(t,z,x) - F(x_i,z,x)$, hay $F = Q(t-x_i)+R$.

Bước 2: Chứng minh cho trường hợp $P_k = (t-x_1)(t-x_2)...(t-x_k)$, tức là ta phải chứng minh với mỗi $F \in \mathbb{C}(t,z,x_1...x_k)$ tồn tại $Q \in C\{t,z,x\}$ và một đa thức $R \in \mathbb{C}\{z,x\}[t]$ bậc $< k$ sao cho $F = Q(t-x_1)(t-x_2)...(t-x_k)+R$ trong đó Q,R duy nhất.

Thật vậy, theo bước 1 ta có:

$$\begin{aligned}
F &= Q_1(t-x_1)+R_1. \ (Q_1 \in \mathbb{C}\{t,z,x\}, R_1 \in \mathbb{C}\{x,z\}) \\
Q_1 &= Q_2(t-x_2)+R_2. \ (Q_2 \in \mathbb{C}\{t,z,x\}, R_2 \in \mathbb{C}\{x,z\}) \\
&\vdots \\
Q_{k-1} &= Q_k(t-x_k)+R_k. \ (Q_k \in \mathbb{C}\{t,z,x\}, R_k \in \mathbb{C}\{x,z\})
\end{aligned}$$

thay thế lần lượt$Q_{k-i}(i=1,...,k-2)$ vào Q_1 ta được:

$$F = Q_k(t-x_1)(t-x_2)...(t-x_k)+R_1+(t-x_1)R_2+...+(t-x_1)(t-x_2)+...+(t-x_{k-1})R_k$$

do đó với $Q := Q_k, R = R_1+(t-x_1)R_2+...+(t-x_1)(t-x_2)+...+(t-x_{k-1})R_k$ ta có:

$$F = Q.(t-x_1)...(t-x_k) + R.$$

Sự duy nhất của Q và R sẽ được trình bày trong phần chứng minh sau.

Bước 3. Gọi $\delta_i(x)$ là hàm đối xứng thứ n của các phần tử $x_1, ..., x_k$, ta thế $y_i = \delta_i(x)$ vào biểu thức $P_k(t,y) = t^k + y_1 t^{k-1} + ... + y_k$

$$= (t-x_1)(t-x_2)...(t-x_k).$$

Tiếp theo đặt: $F(t,z,x) = f(t,z,\delta_1(x),...,\delta_k(x))$ khi đó ta có thể chia $f(t,z,y)$ bởi một đa thức tổng quát như ở bước 2 tức là :

$$f(t,z,x) = Q(t,z,x)(t-x_1)...(t-x_k) + R(t,z,x)$$

với Q và R luôn đối xứng trước sự hoán vị của $x_1, ..., x_k$.

Ngoài ra, theo định lý cơ bản của hàm đối xứng, có một hàm chỉnh hình $q(t,z,y) \in \mathbb{C}\{t,z,y\}$ và đa thức $r(t,z,y)$ theo t có bậc nhỏ hơn k và hệ số thuộc vào $\mathbb{C}\{x,y\}$ sao cho:

$$q(t,z,\delta_1(x),...,\delta_k(x)) = Q(t,z,x)$$

và

$$r(t,z,\delta_1(x),...,\delta_k(x)) = R(t,z,x)$$

từ đó suy ra: $F(t,z,x) = f(t,z,\delta_1(x),...,\delta_k(x))$
$= q(t,z,\delta_1(x),...,\delta_k(x))(t^k + \delta_1(x)t^{k-1} + ... + \delta_k(x)) + r(t,z,\delta_1(x),...,\delta_k(x)).$

Mặt khác ta biết phép thế $\delta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ là toàn ánh nên ta suy ra

$$f = q.p_k + r.$$

$\square$

Định lý 1.2.2 (Division theorem,[1], p.339)**.**

Gọi $f, g \in \mathbb{C}\{t, z\}$ *và gọi* g *là* $t-$*tổng quát bậc* k *khi đó* $\exists q \in \mathbb{C}\{t, z\}$ *và đa thức* $r \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ *bậc* $\leq k-1$ *sao cho*

$$r(t, z) = \sum_{i=1}^{k} q_i(z) k^{k-i}, q_i(z) \in \mathbb{C}\{z\}$$

với $f = q.g + r$ q, r *là xác định duy nhất .***(Định lý này thường được gọi là công thức Weierstrass)**

Chứng minh. Định lý này được chứng minh từ Bổ đề trên.

Gọi g là $t-$ tổng quát cấp k, và gọi $f \in \mathbb{C}\{t, z\}$, theo Bổ đề 1.2.1 ta có thể viết g và f dưới dạng

$$g = \tilde{g}(t, y, z).p_k + \tilde{r}(t, z, y)$$

$$f = \tilde{\tilde{q}}(t, z, y).p_k + \tilde{\tilde{r}}(t, z, y)$$

Trong đó $\tilde{r}, \tilde{\tilde{r}}$ là những đa thức bậc $k-1$ với hệ số trong $\mathbb{C}\{z, y\}$. Do đó ta có thể thay thế $y = y(z)$ sao cho $\tilde{r}(t, z, y(z)) \equiv 0$ từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} g(t, z) &= \tilde{q}(t, z, y(t)).p_k \text{ với } (\tilde{q}(0, 0, 0) \neq 0) \\ f(t, z) &= \tilde{\tilde{q}}(t, z, y(z)).p_k + \tilde{\tilde{r}}(t, z, y(z)) \\ &= \tilde{\tilde{q}}.\tilde{q}^{-1}.g + \tilde{\tilde{r}}. \end{aligned}$$

Như vậy nếu gán $q(t, z) = \tilde{\tilde{q}}(t, z, y(z)).\tilde{q}^{-1} g(t, z, y(z))$ và $r(t, z) := \tilde{\tilde{r}}(t, z, y(z))$ thì ta có biểu diễn $f = q.g + r$.

Bây giờ ta chứng minh q, r là duy nhất, thật vậy giả sử $f = q_1.g + r_1 = q_2.g + r_2$ suy ra $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1).g$

Mặt khác các k không điểm của $g(t, z)$ chứa trong lân cận của $0 \in \mathbb{C}$ với z đủ nhỏ, và đa thức $r_1(t, z) - r_2(t, z)$ có bậc $\leq k-1$ và có ít nhất k không điểm nên $r_1(t, z) - r_2(t, z) = 0$ suy ra $r_1 = r_2$ và $q_1 = q_2$. □

Định lý 1.2.3 (Weierstrass preparation theorem,[1],p.338)**.**

Gọi $g(t, z) = g(t, z_1, ..., z_n)$ *là chuỗi lũy thừa hội tụ từ* $\mathbb{C}\{t, z_1, ..., z_n\}$ *và gọi* g *là* $t-$*tổng quát cấp* k*. Khi đó tồn tại* $u(t, z) \in \mathbb{C}\{t, z\}$ *và* $c_i(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ *sao cho*

$$g(t, z) = (t^k + c_1(z)t^{k-1} + ... + c_k(z)).u(t, z)$$

với $c_i(0) = 0$ *và* $u(0,0) \neq 0$ *và* c_i, u *là duy nhất.*

Chứng minh. Gọi $g \in \mathbb{C}(t,z)$ là tổng quát cấp k, nghĩa là $g(t,0)$ là chuỗi lũy thừa có dạng $g(t,0) = c.f^k + ... +$ (số hạng cao hơn theo t) với $c \neq 0$,theo Bổ đề 1.2.1 ta phân tích:

$$g(t,z) = q(t,z,y)(t^k + y_1 t^{k-1} + ... + y_k) + r(t,z,y) \tag{1.2}$$

với đa thức

$$r(t,z,y) = A_1(z,y)t^{k-1} + ... + A_k(z,y)$$

và $q \in \mathbb{C}\{t,z,y\}$

Mục đích của chúng ta là thay thế hệ số tổng quát y_i của p_k bởi hàm chỉnh hình $y_i(z)$ sao cho số hạng dư r trong(1.2) là triệt tiêu, để làm được điều này trước hết ta phải chứng tỏ được:

$$\frac{\partial A_i}{\partial y_i}(0;0) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i > j \\ -c & \text{nếu } i = j \end{cases} \tag{1.3}$$

Thật vậy, nếu ta cho $y = z = 0$ trong (1.2) và so sánh hệ số của $t^0, ..., t^k$ ta được: $A_i(0;0) = 0$ và $q(0;0;0) = c$. Do vậy (1.3) thỏa mãn.

Nếu 2 vế của (1.2) khác nhau và phụ thuộc vào y_j thì với $y = z = 0$ ta có:

$$0 = \frac{\partial q}{\partial y_j}(t,0,0)t^k q(t,0,0)t^{k-j} + \frac{\partial A_1}{\partial y_5}(0,0)t^{k-1} + ... + \frac{\partial A_k}{\partial y_j}(0,0)$$

so sánh hệ số của $t^0, t^1, ..., t^(k-1)$ ta suy ra $\frac{\partial A_k}{\partial y_j}(0,0) = 0$, $\frac{\partial A_{k-1}}{\partial y_j}(0,0) = 0$,...$\frac{\partial A_{k+1}}{\partial y_j}(0,0) = 0$ và $\frac{\partial A_j}{\partial y_j}(0,0) = -q(0,0,0) = -c$. Vậy (1.3) được chứng minh.

Ngoài ra ma trận $\frac{\partial A_j}{\partial y_j}$ là ma trận tam giác trên với định thức $(-c)^k \neq 0$, nên từ phương trình $A_i(z, y, (t).., y_k(z)) = 0, i = 1, k$ và kết hợp với giả thiết của định lý ta kết luận rằng tồn tại $y_j \in \mathbb{C}\{z\}$ với $y_j = 0$ sao cho

$$A_i(z, y_1(z), ..., y_k(z) = 0), i = 1, .., k$$

Nếu chúng ta thế $y = y(t)$ vào phương trình (1.2) và $u(t,z) = q(t,z,y(z))$ ta được $g(t,z) = (t^k + y_1(z)t^{k-1} + ... + y_k(z))u(t,z)$trong đó $u(0,0) \neq 0$, điều này chứng tỏ rằng g là tích của đa thức Weierstrass và đa thức u.

Tiếp theo ta chứng minh u và đa thức Weierstrass p_k là duy nhất

Gọi $g(t,z) = u(t^k + c_1 t^{k-1} + ... + c_k)$
$= \widetilde{u}(t^k + \widetilde{c_1} t^{k-1} + ... + \widetilde{c_k})$

và gọi $U = V \times W$ là lân cận của $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ với u và $\widetilde{u}$ không triệt tiêu trên lân cận này.

Từ nghiệm của đa thức không phụ thuộc vào các hệ số nên tất cả các k không điểm của hai đa thức

$$\begin{array}{l} p_k = t^k + c_1(t)t^{k-1} + ... + c_k(z) \\ p_{\widetilde{k}} = t^k + \widetilde{c_1}(t)t^{k-1} + ... + \widetilde{c_k}(z) \end{array}.$$

nằm trong V với z đủ nhỏ thuộc $\mathbb{C}^n$.

Từ $u \neq 0$, nên các không điểm của $g(t,z)$ nằm trong V, nghĩa là hai đa thức trên có các không điểm trùng nhau. Do đó với z đủ nhỏ thì $c_i(z) = \widetilde{c_i}(z)$ điều này kéo theo $c_i = \widetilde{c_i}$ và do đó $u = \widetilde{u}$, hay p_k, u là duy nhất. $\square$

Chương 2

ỨNG DỤNG

Nội dung của chương này là giới thiệu về phép khai triển Puiseux và áp dụng Định lý chuẩn bị Weierstrass ***(Định lý 1.2.3)*** để chứng minh sự tồn tại của phép tham số hóa một đa thức Weierstrass khả quy.

2.1 Khai triển Puiseux

Định nghĩa 2.1.1. Khai triển dạng:

$$y = t_0 x^{\frac{m_0}{n_0}} + t_1 x^{\frac{m_1}{n_0 n_1}} + t_2 x^{\frac{m_2}{n_0 n_1 n_2}} + ...$$

trong đó $(m_i, n_i) = 1, \forall i = 0, 1, ..$ được gọi là khai triển Puiseux của f trong lân cận của điểm $(0, 0)$, các cặp (m_i, n_i) gọi là cặp số Puiseux của f.

Mệnh đề 2.1.2. *Giả sử $f \in \mathbb{C}[x, y]$, $y-$ tổng quát cấp t, giả sử*

$$y = x^{\frac{p_0}{q_0}}(t_0 + x^{\frac{p_1}{q_0 q_1}}(t_1 ...))$$

là một khai triển Puiseux của f trong lân cận của $(0; 0)$ khi đó hoặc là y có một số hữu hạn phần tử, hoặc là tập các số nguyên $\{q_i\}_{i=0,1}$ thỏa điều kiện $\exists i \in \mathbb{N}^*, \forall i \geq i_0$.

2.2 Phép tham số hóa đường cong

Định lý 2.2.1. *Giả sử f là đa thức bất khả quy và $y-$ tổng quát cấp m khi đó tồn tại lân cận của $(0, 0)$ sao cho trong lân cận này f có một phép tham số hóa dưới dạng*

$$\begin{cases} x = t^m \\ y = y(t) \in \mathbb{C}(t) \end{cases}$$

Chứng minh. Theo Định lý 1.2.3, tồn tại duy nhất $u \in \mathbb{C}^*\{x, y\}, g \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ sao cho $f = u.g$, với $g = y^m + a_{m-1}(x)y^{m-1} + ... + a_1(x)y + a_0(x)$ và bất khả quy trong $\mathbb{C}\{x\}[y]$.

Theo thuật toán Puiseux-Newtơn, tồn tại nghiệm của phương trình $f(x, y) = 0$ dưới dạng $y = y(x^{\frac{1}{N}}) \in \mathbb{C}\{x^{\frac{1}{N}}\}$.

Đặt $t = x^{\frac{1}{N}} \Leftrightarrow x = t^N$, khi đó $f(t^N, y(t)) = 0$, điều này suy ra ta phải chứng tỏ $N = m$. Thật vậy, để ý rằng $y = y(x^{\frac{1}{N}})$ là một nghiệmcủa phương trình $f(x, y) = 0$ thì $y_j = y(\zeta^j x^{\frac{1}{N}}), j = 0, ..., N-1$ là các nghiệm của phương trình $f(x, y) = 0$. Do đó $y = y(\zeta^j x^{\frac{1}{N}}), j = 1, ..., N$ là các nghiệm của phương trình $g(x, y) = 0$ suy ra

$$h(x, y) = \prod_{j=1}^{N} \left(y - y(\zeta^i x^{\frac{1}{N}})\right) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$$

là ước của $g(x, y)$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists u' \in \mathbb{C}^*\{x\}[y] : g = u'.h \\ &\Rightarrow f = u.g = u.u'.h \end{aligned}.$$

Mặt khác từ tính duy nhất của Định lý 1.2.3 ta suy ra $g = h$ do đó:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g = \prod_{j=0}^{N} \left(y - y(\zeta^i x^{\frac{1}{N}})\right) \in \mathbb{C}\{x\}[y] \\ &\Rightarrow m = N. \end{aligned}.$$

□

Hệ quả 2.2.2. *Xét $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ là đa thức bất khả quy, $m = mult_0(V(f))$(Quy ước f là $y-$ tổng quát cấp m), khi đó $x = 0$ không phải là tiếp tuyến của đường cong $V(f)$ tại $(O(0, 0))$.*

Chứng minh. Thật vậy một phép tham số hóa của $x = 0$ là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x(t), y(t)) = f(0, t)$

$\Rightarrow Int_0(V(f), x = 0) = ord_t f(0, t) = m$

Suy ra $x = 0$ không là tiếp tuyến của đường cong $V(f)$. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Brieskorn, *Plane Algebraic Curves.*

[2] Griffiths P.A, *Introduction to algebraic curves* AMS, 1989.