BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN
****

HÀ DUY NGHĨA

TÔPÔ THƯƠNG
ĐỐI VỚI MỘT ÁNH XẠ

TIỂU LUẬN TÔPÔ ĐẠI SỐ

Quy Nhơn, tháng 4 năm 2010

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN
****

HÀ DUY NGHĨA

TÔPÔ THƯƠNG ĐỐI VỚI MỘT ÁNH XẠ

CAO HỌC TOÁN KHÓA 11

Chuyên ngành: **Đại số và lý thuyết số**

TIỂU LUẬN TÔPÔ ĐẠI SỐ

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS NGUYỄN SUM

Quy Nhơn, tháng 4 năm 2010

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Tôpô đại số là một bộ môn toán học mới mẻ và cực kỳ quan trọng, người ta dùng công cụ đại số để nghiên cứu cấu trúc các không gian tôpô . Có nhiều kết quả thú vị như dùng công cụ tôpô đại số để chứng minh định lý điểm bất động Brouwer, định lý cơ bản của đại số, đặc biệt kết quả nổi tiếng nhất đó là giả thiết Poincaré,..

Trong khuôn khổ tiểu luận kết thúc bộ môn, tôi xin trình bày một số vấn đề liên quan đến tôpô thương đối với một ánh xạ, tiểu luận gồm 2 nội dung cùng với phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo:

1. Không gian tôpô thương đối với một ánh xạ.

2. Áp dụng chứng minh hai không gian $\mathbb{C}P^1$ và S^2 đồng phôi.

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng trong học tập, nghiên cứu và được sự hướng dẫn nhiệt tình của thầy giáo hướng dẫn, nhưng do năng lực của bản thân và thời gian còn hạn chế nên tiểu luận khó tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn để tiểu luận được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn PGS.TS Nguyễn Sum người đã tận tình giảng dạy, giúp đỡ, cùng tập thể lớp cao học toán khoá 11 tạo điều kiện cho tôi hoàn thành tiểu luận này.

1 CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÔPÔ THƯƠNG

Định nghĩa 1.1. Cho X là không gian tôpô , Y là tập hợp khác rỗng, ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ là toàn ánh liên tục, gọi

$$\mathscr{U}_f = \{U \subset Y, f^{-1}(U) \text{ mở trong} X\}$$

khi đó $\mathscr{U}_f$ là tôpô trên Y gọi là tôpô thương đối với f.

Thật vậy:

- $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ mở trong X vậy $\emptyset \in \mathscr{U}_f$
- $f^{-1}(Y) = X -$ mở $\Rightarrow Y \in \mathscr{U}_f$.
- $U_1, U_2 \in \mathscr{U}_f, f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ -mở $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}_f$.
- $\{U_i, i \in I\} \subset \mathscr{U}_f \Rightarrow f^{-1}(U_i)$ mở $\forall i \in I$, $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i \in I} U_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ là mở, suy ra $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathscr{U}_f$

Điều này chứng tỏ $\mathscr{U}_f$ là tôpô trên Y.

Ví dụ 1.2.

- Không gian xạ ảnh thực $\mathbb{R}P^n = \{$Các không gian con 1 chiều của $\mathbb{R}^{n+1}.\}$ Xét phép chiếu $p : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n, p(x) = [x] = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$, là toàn ánh, nên ta có $\mathbb{R}P^n$ là không gian tôpô với tôpô thương đối với ánh xạ p.
- Không gian xạ ảnh phức $\mathbb{R}P^n = \{$Các không gian con 1 chiều của $\mathbb{C}^{n+1}.\}$. Tương tự, xét phép chiếu $q : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n, q(x) = [x] = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$ là toàn ánh và ta cũng có $\mathbb{C}P^n$ là không gian tô với tôpô thương đối với q.
- Cho X là không gian tôpô $\sim$ là quan hệ tương đương trên X, đặt $Y = X \diagup \sim$ là tập thương gồm tất cả các lớp tương đương của $x \in X$, khi đó Y là không gian tôpô với tôpô thương đối với phép chiếu $p : X \longrightarrow Y$.

Định lý 1.3. *Cho X, Z là hai không gian tôpô , Y là tập hợp, $f : X \longrightarrow Y$ là toàn cấu, giả sử rằng Y là không gian tôpô với tôpô thương đối với f khi đó ánh xạ $g : Y \longrightarrow Z$ liên tục khi và chỉ khi $g \circ f : X \longrightarrow Z$ liên tục.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$). Theo giả thiết Y là kg tôpô với tôpô thương với ánh xạ f nên với U là tập mở trong Y ta có $f^{-1}(U)$ là mở trong X nên f là ánh xạ liên tục.

Ngoài ra ta có g liên tục nên $g \circ f$ liên tục.

Ngược lại, giả sử $g \circ f$ liên tục, với mọi V mở trong Z ta có :$(g \circ f)^{-1}(V)$ mở trong X,nên $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ mở trong Y, suy ra $g^{-1}(V) \in \mathscr{U}_f)$ do đó $g^{-1}(V)$ mở trong Y. Vậy g liên tục. □

Nhận xét 1.4. Tôpô thương σ trên tập thương $X/\sim$ là tôpô mạnh nhất làm cho ánh xạ chính tắc f liên tục. Thật vậy, giả sử ϱ trên $X/\sim$ làm cho ánh xạ chính tắc f liên tục. Khi đó bất kỳ G thuộc ϱ thì $f^{-1}(G)$là tập mở trong X, do đó theo định nghĩa tôpô thương thì $G \in \sigma$, vậy $\varrho \leq \sigma$.

Mệnh đề 1.5. *Cho X là G-Không gian (X là không gian tôpô , G là nhóm tôpô) khi đó phép chiếu $\pi : X \longrightarrow X/G, \pi(x) = Gx$ là ánh xạ mở.*

Chứng minh. $\forall U \subset X$ là tập mở, ta có :

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U)\} \\
&= \{x \in X \mid \exists y \in U : \pi(x) = \pi(y)\} \\
&= \{x \in X \mid \exists g \in G, y \in Y : x = gy\} \\
&= \{x \bigcup_{g \in G} gU
\end{aligned}$$

Từ $\theta_g : X \longrightarrow X, \theta(x) = gx$ là phép đồng phôi và U mở trong Xnên gU trong X. Do đó $\bigcup_{g \in G} gU$ mở trong X, vậy $\pi(U)$ là mở, hay π là ánh xạ mở.

□

Định lý 1.6. *Cho X là không gian compact Hausdorff thì :*

i)Nếu G là nhóm hữu hạn và X là G-không gian, thì X/G là không gian compact Hausdorff.

ii)Nếu A là không gian con đóng của X, thì X/A là compact Hausdorff.

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài toán: Gọi $S^n = \{\in \mathbb{R}^{n+1} |\ \|x\| = 1\}$ là mặt cầu n chiều, chứng minh rằng :

1. $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$

2. $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

Giải

1.Phép chứng minh tiến hành theo các bước sau:

Bước 1 ta xây dựng tập thương $X/A, A \subset X$.

Cho X là không gian tôpô , $A \subset X$ định nghĩa quan hệ tương đương trên X như sau: $\forall x, y \in X, x \sim y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x, y \in\ A \end{array}\right.$

Dễ kiểm tra được $\sim$ là quan hệ tương đương trên X,

Khi đó: $\forall x \in X, [x] = \left[\begin{array}{l} \{x\},\ x \in A \\ A,\ x \in A \end{array}\right.$

Suy ra : $X/\sim = (X \setminus A) \cup \{A\} = X/A$

Bước 2 Chứng minh $S^1_+/A \cong S^1$.

Đặt $X = S^1_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}., A = \{(-1, 0), (1, 0)\}$

Xét ánh xạ $f : S^1 \longrightarrow S^1_+/A, f(x) = [x]$ ta chứng minh f đồng phôi .

- f liên tục và toàn ánh là hiển nhiên
- Chứng minh f đơn ánh $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S^1$, giả sử $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$
$$\Leftrightarrow [(x_1, y_1)] = [(x_2, y_2)]$$

điều này suy ra: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ hoặc $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$

Nếu $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ thì f đơn ánh là đúng.

Nếu $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$thì $[(x_1, y_1)] = [(x_2, y_2)] = A$ điều này cũng chứng tỏ $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Vậy f là đơn ánh

Ngoài ra, S^1 là Hausdoff, S^1_+/A là compact nên f là đồng phôi.

Vậy $S^1_+/A \cong S^1$.

Bước 3 Chứng minh $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$. theo sơ đồ sau

$$\begin{tikzcd} S^1_+ \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S^1_+/A \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}P^1 \end{tikzcd}$$

Trong đó p là phép chiếu là toàn ánh chính tắc, còn f được xác định như sau $f(x, y) = [x : y] = \{\alpha(x, y), \alpha \in \mathbb{R}\}$, dễ chứng minh được f cũng là toàn ánh.

Bây giờ ta xác định g như sau:$g[(x, y)] = [x : y]$.

Khi đó $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(p(x, y)) = g[(x, y)] = \alpha(x, y) = f(x, y)$, vậy $g \circ p = f$.

Ngoài ra, f là toàn ánh nên g cũng toàn ánh, ta cần chứng minh g đơn ánh: $\forall [(x_1, y_1)], [(x_2, y_2)] \in S^1_+/A$, giả sử $g[(x_1, y_1)] = g[(x_2, y_2)]$

$$\Leftrightarrow [(x_1 : y_1] = [x_2, y_2]$$

$$\Leftrightarrow (x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha x_2 \\ y_1 = \alpha y_2 \end{cases}$$

Nếu $\alpha = 1$thì $[(x_1, y_1)] = [(x_2, y_2)]$ là đúng.

Nếu $\alpha \neq 1$ ta có $\alpha^2(x_2^2 + y_2^2) = x_1^2 + y_1^2 = 1 \Rightarrow \alpha = -1$

khi đó $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ y_1 = -y_2 \end{cases}$

Do $y_2 \geq 0$ nên $y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$ từ đó suy ra $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ hay $[(x_1, y_1)] = [(x_2, y_2)]$ suy ra g đơn ánh.

Mặt khác ta có :

f liên tục, p liên tục nên g liên tục.

$\mathbb{R}P^1$ là Hausdorff, S^1_+/A là compact. Nên suy ra g là phép đồng phôi.

Vậy $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

2. Tương tự như trên, đặt $X = S^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$,

$$S^1_+ = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$$

Ta chứng minh $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ như sau:

Trước hết chứng minh $S^2 \cong S^2_+/S^1_+$

Xét ánh xạ $f : S^2 \longrightarrow S^2_+/S^1_+$, f(x,y,z)=[(x,y,z)]

Hiển nhiên f liên tục và toàn ánh

Ta cần chứng minh f đơn ánh:

$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S^2$, giả sử $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$

$$\Leftrightarrow [(x_1, y_1, z_1)] = [(x_2, y_2, z_2)]$$

$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$ hoặc $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S^1_+$

Nếu $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$ thì f đơn ánh là đúng.

Nếu $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in A$thì $[(x_1, y_1, z_1)] = [(x_2, y_2, z_2)] = A$ điều này cũng chứng tỏ $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$. Vậy f là đơn ánh.

Vậy $S^2_+/S^1_+ \cong S^2$.

Bước 2 Chứng minh $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ theo sơ đồ

$$\begin{tikzcd} S^2_+ \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S^2 \cong S^2_+/S^1_+ \arrow[r, "g"] & \mathbb{C}P^1 \end{tikzcd}$$

$$[(x, y, z)] \longmapsto \langle (x + iy : z) \rangle$$

Trong đó ánh xạ f được xây dựng như sau:

$$f : S^2_+ \longrightarrow \mathbb{C}P^1$$

$$(x, y, z) \longmapsto \langle (x + iy : z) \rangle$$

dễ chứng minh được f liên tục và toàn ánh, khi đó gọi

$$g : S^2_+/S^1_+ \longrightarrow \mathbb{C}P^1$$

$$[(x, y, z) \longmapsto [x + iy : z]$$

ta có được $f = g \circ p$ và do f là toàn ánh nên g cũng toàn ánh. Ta cần chứng minh g đơn ánh

$\forall [(x_1, y_1 z_1,)], [(x_2, y_2, z_2)] \in S^2_+/S^1_+$, giả sử $g[(x_1, y_1, z_1)] = g[(x_2, y_2, z_2)]$

$$\Leftrightarrow [x_1 + iy_1 : z_1] = [x_2 + iy_2 : z_2]$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + iy_1)z_2 = (x_2 + iy_2)z_1$$
$$\Leftrightarrow (x_1^2 + y_1^2)z_2^2 = (x_2^2 + iy_2^)z_1^2$$
$$\Rightarrow (1 - z_1^2)z_2^2 = (1 - z_2^2)z_1^2$$
$$\Rightarrow z_2 = z_1$$

Nếu $z_1 = z_2 = 0$ thì $(x_1, y_1 z_1,), (x_2, y_2, z_2) \in S_+^1$ do đó $[(x_1, y_1 z_1,)] = [(x_2, y_2, z_2)]$

Nếu $z_1 = z_2 > 0$ thì $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ do đó $[(x_1, y_1 z_1)] = [(x_2, y_2, z_2)]$

Điều này chứng tỏ g đơn ánh.

Ngoài ra f, liên tục,p liên tục nên g cũng liên tục và S_+^2/S_+^1 là compact ,$\mathbb{C}P^1$ là Hausdorff nên ta suy ra được g là phép đồng phôi.

Vậy $\quad \mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

Tài liệu

1. Tài liệu học tập Tôpô đại số Cao học toán khóa 11.
2. Jie Wu. *Lecture Notes on Algebraic Topology* ,National University of Singapore.