BÀI TẬP **GIẢI TÍCH HÀM** QUA CÁC KỲ THI

Trần Mậu Quý - K.16 - http://mathvn.com

Tập tài liệu nhỏ này chỉ là sự tuyển chọn các bài tập về không gian định chuẩn thường xuyên xuất hiện trong các đề thi của PGS.TS. Nguyễn Hoàng. Hầu hết chúng là những bài đơn giản mà mỗi học viên dễ dàng giải được.

1 Toán tử tuyến tính liên tục

Bài 1. *Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn và $A : X \longrightarrow Y$ là một toán tử cộng tính, tức $A(x+y) = Ax + Ay$, với mọi $x, y \in X$. Chứng minh rằng nếu A liên tục tại 0 thì A liên tục trên X.*

Giải. Trước hết ta có:

- $A(0) = A(0+0) = A(0) + A(0)$ nên $A(0) = 0$.
- $0 = A(0) = A(x-x) = A(x+(-x)) = A(x) + A(-x)$
  Suy ra $A(-x) = -Ax$ với mọi $x \in X$.
- $A(x-y) = A(x+(-y)) = Ax + A(-y) = Ax - Ay$, với mọi $x, y \in X$.

Lấy bất kì $x \in X$. Giả sử $x_n \longrightarrow x$. Khi đó $x_n - x \longrightarrow 0$. Do A liên tục tại 0 nên $A(x_n - x) \longrightarrow A(0) = 0$, hay $A(x_n) - Ax \longrightarrow 0$. Suy ra $A(x_n) \longrightarrow Ax$. Vậy A liên tục trên X. $\square$

Bài 2. *Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn* thực *và $A : X \longrightarrow Y$ là một toán tử cộng tính* [1]. *Chứng minh rằng nếu $\sup\limits_{||x|| \leq 1} ||Ax|| < +\infty$* [2] *thì A là toán tử tuyến tính liên tục trên X.*

Giải. Ta dễ dàng chứng minh được rằng $A(qx) = qAx$, với mọi $q \in \mathbb{Q}, x \in X$.
Tiếp theo ta chứng minh A liên tục trên X.
Cách 1 (Gián tiếp) Giả sử A không liên tục tại 0. Khi đó:

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists y_n \in X :\ ||y_n|| < \frac{1}{n^2} \text{ và } ||Ay_n|| \geq \varepsilon_0$$

Đặt $x_n = ny_n$ thì $||x_n|| = n||y_n|| < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tuy nhiên

$$||A(x_n)|| = ||A(ny_n)|| = n||A(y_n)|| \geq n\varepsilon_0.$$

Suy ra $\sup\limits_{||x|| \leq 1} ||Ax|| \geq \sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} ||Ax_n|| \geq \sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} n\varepsilon_0 = +\infty$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.
Do đó A liên tục tại 0. Theo Bài 1 thì A liên tục trên X.

[1] Nếu X là không gian định chuẩn *phức* thì phải giả sử A tuyến tính

[2] Tổng quát, A biến mỗi tập bị chặn trong X thành một tập bị chặn trong Y

Cách 2 (Trực tiếp [3]) Đặt $M = \sup\limits_{||x|| \le 1} ||Ax||$. Lấy bất kì $x \in X$. Giả sử $x_n \longrightarrow x$.
Với mọi $\varepsilon > 0$, chọn $K \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{M}{K} < \varepsilon$.
Vì $Kx_n \longrightarrow Kx$ nên có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $||Kx_n - Kx|| < 1, \forall n \ge n_0$. Suy ra $||A(Kx_n - Kx)|| \le M$, hay $K||A(x_n) - Ax|| \le M$. Do đó $||A(x_n) - Ax|| \le \frac{M}{K} < \varepsilon, \forall n \ge n_0$. Vậy $A(x_n) \longrightarrow Ax$.

Cuối cùng, với mọi $r \in \mathbb{R}$, lấy dãy $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ sao cho $r_n \longrightarrow r$. Khi đó:

$$A(rx) = A(\lim_{n\to\infty} r_n x) = \lim_{n\to\infty} A(r_n x) = \lim_{n\to\infty} (r_n A(x)) = (\lim_{n\to\infty} r_n) Ax = rAx$$

Vậy A tuyến tính. □

Bài 3. *Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn* thực *và $A : X \longrightarrow Y$ là một toán tử cộng tính [4]. Giả sử mọi dãy (x_n) trong X mà $x_n \longrightarrow 0$ thì dãy $(A(x_n))$ bị chặn trong Y [5]. Chứng minh rằng A tuyến tính liên tục trên X.*

Giải. Tương tự cách 1 của Bài 2. (Dãy (x_n) được chỉ ra là dần về 0 nhưng dãy $(A(x_n))$ không bị chặn trong Y). □

Bài 4. *Kí hiệu $X = C_{[0,1]}$ là không gian các hàm số liên tục trên $[0,1]$ với chuẩn "max". Ánh xạ $A : X \longrightarrow X$ xác định bởi $Ax(t) = x(1) - tx(t), t \in [0,1], x \in X$. Chứng minh A tuyến tính liên tục và tính $||A||$.*

Giải. Dễ dàng chứng minh được A tuyến tính, liên tục và $||A|| \le 2$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{n}{n+1} \\ 2(n+1)t - 2n - 1 & \text{nếu } \frac{n}{n+1} < t \le 1 \end{cases}$$

Khi đó $x_n \in X$ và $||x_n|| = 1$, với mọi n, và ta có:

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \ge ||A(x_n)|| = \max_{t\in[0,1]} |A(x_n)(t)|$$

$$\ge A(x_n)(\frac{n}{n+1}) = |x_n(1) - \frac{n}{n+1} x_n(\frac{n}{n+1})| = 1 + \frac{n}{n+1}$$

Cho $n \longrightarrow \infty$ ta được $||A|| \ge 2$. Vậy $||A|| = 2$. □

Bài 5. *Kí hiệu $X = \{x \in C_{[0,1]} | x(0) = 0\}$ với chuẩn "max". Ánh xạ $A : X \longrightarrow X$ xác định bởi $Ax(t) = x(1) - tx(t), t \in [0,1], x \in X$. Chứng minh A tuyến tính liên tục và tính $||A||$.*

Giải. Tương tự Bài 4 với dãy hàm

$$x_n(t) = \begin{cases} -\frac{n+1}{n} t & \text{nếu } 0 \le t \le \frac{n}{n+1} \\ 2(n+1)t - 2n - 1 & \text{nếu } \frac{n}{n+1} < t \le 1 \end{cases}$$

□

[3] Nguyễn Em - K16
[4] Nếu X là không gian định chuẩn *phức* thì phải giả sử A tuyến tính
[5] Tổng quát, A biến mỗi dãy bị chặn trong X thành một dãy bị chặn trong Y

Bài 6. *Kí hiệu* $X = \{x \in C_{[0,1]} | x(0) = x(1) = 0\}$ *với chuẩn "max". Chứng minh các ánh xạ* $A : X \longrightarrow X$ *sau đây là tuyến tính liên tục và tính* $||A||$*:*

a) $Ax(t) = x(t) + x(1-t), t \in [0,1], x \in X.$

b) $Ax(t) = x(t) - x(1-t), t \in [0,1], x \in X.$

c) $Ax(t) = t^2 x(t), t \in [0,1], x \in X.$

Giải.

a) Rõ ràng A tuyến tính, liên tục và $||A|| \leq 2$.
Xét hàm số

$$x_0(t) = \begin{cases} 2t & \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -2t+2 & \text{nếu } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó $||x_0|| = 1$ và ta có:

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \geq ||A(x_0)|| = \max_{t\in[0,1]} |A(x_0)(t)| \geq Ax_0(\frac{1}{2}) = x_0(\frac{1}{2}) + x_0(\frac{1}{2}) = 2.$$

Vậy $||A|| = 2$.

b) $||A|| = 2$. Tương tự a) với hàm

$$x_0(t) = \begin{cases} 3t & \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ -6t+3 & \text{nếu } \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ 3t-3 & \text{nếu } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó $||x_0|| = 1$ và ta có:

$$||A(x_0)|| = \max_{t\in[0,1]} |A(x_0)(t)| \geq Ax_0(\frac{1}{3}) = x_0(\frac{1}{3}) - x_0(\frac{2}{3}) = 1 - (-1) = 2.$$

c) Rõ ràng A tuyến tính, liên tục và $||A|| \leq 1$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{n+1}{n}t & \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{n}{n+1} \\ -(n+1)t + n + 1 & \text{nếu } \frac{n}{n+1} < t \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó $x_n \in X$ và $||x_n|| = 1$, với mọi n. Ta có:

$$||A(x_n)|| = \max_{t\in[0,1]} |A(x_n)(t)| \geq Ax_n(\frac{n}{n+1}) = (\frac{n}{n+1})^2 x_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{n^2}{(n+1)^2}.$$

Suy ra

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \geq ||A(x_n)|| = \frac{n^2}{(n+1)^2}.$$

Cho $n \longrightarrow \infty$ ta được $||A|| \geq 1$. Vậy $||A|| = 1$.

□

Bài 7. *Kí hiệu $X = C_{[-1,1]}$. Chứng minh phiếm hàm tuyến tính $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sau đây là liên tục và tính $||f||$:*

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt.$$

Giải. Rõ ràng f tuyến tính, liên tục và $||f|| \leq 2$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ -nt & \text{nếu } -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \\ -1 & \text{nếu } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó $x_n \in X$ và $||x_n|| = 1$, với mọi n. Ta có:

$$||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)| \geq |f(x_n)| = 2 - \frac{1}{n}$$

Cho $n \longrightarrow \infty$ ta được $||f|| \geq 2$. Vậy $||f|| = 2$. □

Bài 8. *Cho $f : X \longrightarrow K$ là một phiếm hàm tuyến tính khác 0.*

a) Chứng minh tồn tại không gian con một chiều E sao cho $X = Kerf \oplus E$.

b) Chứng minh rằng $Kerf$ đóng hoặc $Kerf$ trù mật khắp nơi trong X.

c) Đặt $F = f(B'(0_X, 1))$. Chứng minh rằng F bị chặn hoặc $F = K$.

Giải.

a) Do $f \neq 0$ nên có $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Đặt $E = \langle\{x_0\}\rangle$ thì E là không gian con 1 chiều của X. Ta chứng minh $X = Kerf \oplus E$.
Với mọi $x \in X$, đặt $y = x.f(x_0) - x_0.f(x)$ thì $f(y) = 0$ nên $y \in Kerf$. Theo cách đặt ở trên thì

$$x = \frac{1}{f(x_0)}y + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \quad \in Kerf + E$$

Vậy $X = Kerf + E$.
Mặt khác, nếu $y \in Kerf \cap E$ thì $f(y) = 0$ và $y = k.x_0$. Suy ra

$$0 = f(y) = f(kx_0) = kf(x_0)$$

$$\Rightarrow k = 0(\text{ do } f(x_0) \neq 0) \Rightarrow y = 0$$

Vậy $Kerf \cap E = \{0\}$.
Do đó: $X = Kerf \oplus E$.

b) Nếu f liên tục trên X thì $Kerf = f^{-1}(\{0\})$ là tập đóng.
Giả sử f không liên tục trên X. Ta chứng minh $\overline{Kerf} = X$.
Do f tuyến tính nên f không liên tục tại 0, tức tồn tại $\varepsilon_0 > 0$ sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X : ||x_n|| < \frac{1}{n} \text{ và } |f(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

Với mọi $x \in X$, đặt $y_n = -\frac{f(x)}{f(x_n)}.x_n + x$ thì $f(y_n) = 0$ nên $y_n \in Kerf, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Và ta có:

$$||y_n - x|| = || - \frac{f(x)}{f(x_n)}.x_n|| = \frac{|f(x)|}{|f(x_n)|}.||x_n|| \leq \frac{|f(x)|}{\varepsilon_0.n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

Vậy $y_n \longrightarrow x$. Do đó $X = \overline{Kerf}$.

c) Nếu f liên tục trên X thì f biến mỗi tập bị chặn trong X thành một tập bị chặn trong K, do đó F bị chặn.
Giả sử f không liên tục trên X. Ta chứng minh $F = f(B'(0_X, 1)) = K$.
Lấy bất kì $y \in K$. Nếu $y = 0$ thì có $x = 0 \in B'(0_X, 1)$ sao cho $f(x) = y$.
Xét $y \neq 0$. Do f không liên tục tại 0 nên có $\varepsilon_0 > 0$ sao cho với

$$\delta = \frac{\varepsilon_0}{|y|}, \exists x_1 \in X : ||x_1|| < \frac{\varepsilon_0}{|y|} \text{ và } |f(x_1)| \geq \varepsilon_0$$

Đặt $x = \frac{y}{f(x_1)}.x_1$ thì $||x|| = \frac{|y|}{|f(x_1)|}.||x_1|| \leq \frac{|y|}{\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_0}{|y|} = 1$, tức $x \in B'(0_X, 1)$ và $f(x) = y$.
Vậy $F = K$.

□

Bài 9. *Cho X là một không gian định chuẩn và $f \in X^*$, $a \in K$* [6]*. Chứng minh f liên tục trên X khi và chỉ khi $f^{-1}(a) = \{x \in X | f(x) = a\}$ đóng trong X.*

Giải. Nếu f liên tục thì hiển nhiên $f^{-1}(a)$ là tập đóng.
Ngược lại, giả sử $f^{-1}(a)$ là tập đóng và f không liên tục tại 0. Khi đó có $\varepsilon_0 > 0$ sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X : ||x_n|| < \frac{1}{n} \text{ và } |f(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

Đặt

$$y_n = \begin{cases} a\frac{x_n}{f(x_n)} & \text{nếu } a \neq 0 \\ \frac{x_n}{f(x_n)} - \frac{x_1}{f(x_1)} & \text{nếu } a = 0 \end{cases}$$

Khi đó $y_n \in f^{-1}(a)$, với mọi n. Tuy nhiên dãy (y_n) hội tụ về $y \notin f^{-1}(a)$ [7]. Điều này mâu thuẫn với $f^{-1}(a)$ là tập đóng.
Vậy f liên tục trên X. □

Bài 10. *Cho X là một không gian định chuẩn và $f \in X^*$, a là một số thực bất kì. Chứng minh f liên tục trên X khi và chỉ khi $f^{-1}([a, +\infty)) = \{x \in X | f(x) \geq a\}$ đóng trong X.*

Giải. Nếu f liên tục thì hiển nhiên $f^{-1}([a, +\infty))$ là tập đóng trong X.
Ngược lại, lập luận tương tự Bài 9 với dãy $y_n = (a-1)\frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_n}{f(x_n)}$. Ta có $f(y_n) = a$ nên $y_n \in f^{-1}([a, +\infty))$, với mọi n. Tuy nhiên $y_n \longrightarrow y = (a-1)\frac{x_1}{f(x_1)} \notin f^{-1}([a, +\infty))$ (vì $f(y) = a - 1 \notin [a, +\infty)$). □

[6] $K = \mathbb{R}$ hoặc $K = \mathbb{C}$

[7] $y = 0$ khi $a \neq 0$, $y = -\frac{x_1}{f(x_1)}$ khi $a = 0$

Bài 11. *Cho $f : X \longrightarrow K$ là một phiếm hàm tuyến tính thỏa mãn*

$$\sup_{x,y\in B'(0,1)} |f(x) - f(y)| = r$$

Chứng minh $f \in X^*$ và tính $||f||$.

Giải. Với mọi $x \in B'(0,1)$ thì $-x \in B'(0,1)$ nên:

$$2|f(x)| = |f(x) - f(-x)| \leq \sup_{x,y\in B'(0,1)} |f(x) - f(y)| = r$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{r}{2}\text{[8]} \Rightarrow ||f|| = \sup_{x\in B'(0,1)} |f(x)| \leq \frac{r}{2}$$

Mặt khác, với mọi $x, y \in B'(0,1)$ ta có:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leq ||f||||x-y|| \leq ||f||(||x|| + ||y||) \leq 2||f||$$

Suy ra $r = \sup_{x,y\in B'(0,1)} |f(x) - f(y)| \leq 2||f||$, do đó: $\frac{r}{2} \leq ||f||$. Vậy $||f|| = \frac{r}{2}$. □

Bài 12. *Cho $f \in X^*$ và $f \neq 0$. Đặt $\alpha = inf\{||x|||x \in X, f(x) = 1\}$. Chứng minh $||f|| = \frac{1}{\alpha}$.*

Giải. Đặt $A = \{x \in X|f(x) = 1\}$. Với mọi $x \in A$ ta có:

$$1 = f(x) \leq ||f||||x|| \Rightarrow \frac{1}{||f||} \leq ||x||$$

Suy ra $\frac{1}{||f||} \leq \inf_{x\in A} ||x|| = \alpha$. Do đó $\frac{1}{\alpha} \leq ||f||$.
Mặt khác, với mọi $x \in X$ mà $||x|| = 1$ và $f(x) \neq 0$ ta có $f(\frac{x}{f(x)}) = 1$ nên $\frac{x}{f(x)} \in A$. Do đó

$$\alpha \leq ||\frac{x}{f(x)}|| = \frac{||x||}{|f(x)|} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{\alpha}||x|| = \frac{1}{\alpha}\text{[9]}$$

Do vậy $||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)| \leq \frac{1}{\alpha}$. □

Bài 13. *Cho $f \in X^*$ và $f \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $a \in X$ ta có $d(a, N) = \frac{|f(a)|}{||f||}$, trong đó $N = Ker f$.*

Giải. [10] Nếu $a \in N$ thì đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét $a \notin N$.
Với mọi $y \in N$, ta có

$$|f(a)| = |f(a) - f(y)| = |f(a-y)| \leq ||f||||a-y||$$

$$\Rightarrow \frac{|f(a)|}{||f||} \leq d(a, N)$$

[8] Từ đây suy ra f liên tục
[9] Khi $f(x) = 0$ thì bất đẳng thức này hiển nhiên đúng
[10] Bài này có khá nhiều cách giải, một trong số đó nằm ở trang 111 - sách *Bài tập Giải tích hàm* của *Nguyễn Xuân Liêm*

Với mọi $x \in X$ mà $||x|| = 1$ và $f(x) \neq 0$, ta đặt $y = a - \frac{f(a)}{f(x)}.x$. Khi đó $f(y) = 0$ nên $y \in N$. Do đó

$$d(a, N) \leq ||a - y|| = ||\frac{f(a)}{f(x)}.x|| = \frac{|f(a)|}{|f(x)|} \quad (\text{do } ||x|| = 1)$$

Suy ra $|f(x)| \leq \frac{|f(a)|}{d(a,N)}$ [11]. Từ đó $||f|| \leq \frac{|f(a)|}{d(a,N)}$, hay $d(a, N) \leq \frac{|f(a)|}{||f||}$. □

Ta còn gặp một số biến tướng của bài tập này như sau

Bài 14. *Cho $f \in X^*$ và $f \neq 0$, đặt $N = Kerf$, $x \notin N$. Giả sử tồn tại $y \in N$ sao cho $d(x, N) = ||x - y||$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in X, ||x_0|| = 1$ sao cho $||f|| = |f(x_0)|$.*

Giải. Theo Bài 13 thì

$$||x - y|| = d(x, N) = \frac{|f(x)|}{||f||} =^{12} \frac{|f(x) - f(y)|}{||f||}$$

Suy ra $|f(x - y)| = ||f||.||x - y||$. Đặt $x_0 = \frac{x-y}{||x-y||}$ ta được $|f(x_0)| = ||f||$. □

Bài 15. *Cho X là không gian Hilbert, $a \in X, a \neq 0$. Khi đó với mọi $x \in X$ ta có $d(x, N) = \frac{|\langle x,a\rangle|}{||a||}$, trong đó $N = \langle\{a\}\rangle^{\perp}$.*

Giải. Đây là hệ quả trực tiếp của Bài 13. Tuy nhiên ta có thể giải một cách ngắn gọn như sau.
$\forall y \in N$, ta có:

$$|\langle x, a\rangle| =^{13} |\langle x - y, a\rangle| \leq ||x - y||||a||$$

Suy ra $\frac{|\langle x,a\rangle|}{||a||} \leq ||x - y||$. Do đó $\frac{|\langle x,a\rangle|}{||a||} \leq d(x, N)$.
Mặt khác, nếu đặt $z = x - \frac{\langle x,a\rangle}{||a||^2}a$ thì $z \in N$ vì $\langle z, a\rangle = 0$. Do đó

$$d(x, N) \leq ||x - z|| = ||\frac{\langle x, a\rangle}{||a||^2}a|| = \frac{|\langle x, a\rangle|}{||a||}.$$

□

2 Nguyên lý bị chặn đều

Bài 16. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn, $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Chứng minh các khẳng định sau là tương đương*[14]

a) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in X, \forall\alpha \in I, ||x|| < \delta \Rightarrow ||A_\alpha(x)|| < \varepsilon$

b) $\exists N > 0 : \forall\alpha \in I, ||A_\alpha|| \leq N$

[11] Do $x \notin N$ và N đóng nên $d(x.N) > 0$
[12] Để ý $y \in Kerf$
[13] Để ý $y \in N$ nên $\langle y, a\rangle = 0$
[14] Như vậy hai khái niệm *đồng liên tục đều* và *bị chặn đều* là tương đương

Giải. a) ⇒ b) Lấy cố định $\varepsilon_0 > 0$. Khi đó, tồn tại $\delta_0 > 0$ sao cho

$$||x|| < \delta_0 \Rightarrow ||A_\alpha(x)|| < \varepsilon_0$$

Đặt $\delta = min(1, \delta_0)$ thì $\delta \leq 1$ và $\delta \leq \delta_0$. Do đó

$$||A_\alpha|| =^{15} \sup_{||x||<\delta} ||A_\alpha(x)|| \leq \varepsilon_0$$

Đặt $N = \varepsilon_0$ thì ta có b).
b) ⇒ a) $\forall \varepsilon > 0$, đặt $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$. Khi đó, nếu $||x|| < \delta$ thì

$$A_\alpha(x)|| \leq ||A_\alpha||||x|| \leq N||x|| < N\delta = N\frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$$

□

Bài 17. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn, $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Chứng minh các khẳng định sau là tương đương*

a) $\forall x \in X,\ \forall y^* \in Y^* : \sup\limits_{\alpha\in I} |y^*(A_\alpha x)| < +\infty$

b) $\forall x \in X : \sup\limits_{\alpha\in I} ||Ax|| < +\infty$

Giải. a) ⇒ b) Để ý $y^*(A_\alpha x) = A_\alpha x(y^*)$. Lấy bất kì $x \in X$, theo giả thiết thì dãy $(A_\alpha x)_{\alpha\in I}$ [16] là một dãy bị chặn từng điểm. Do Y^* Banach [17] nên dãy $(A_\alpha x)_{\alpha\in I}$ bị chặn đều, tức $\sup\limits_{\alpha\in I} ||Ax|| < +\infty$.
b) ⇒ a) Hiển nhiên. (Bị chặn đều suy ra bị chặn từng điểm). □

Bài 18. *Cho X là một không gian Banach, Y là không gian định chuẩn, và M là một tập con của $\mathcal{L}(X, Y)$. Chứng minh các khẳng định sau là tương đương*

a) $\forall x \in X,\ \forall y^* \in Y^* : \sup\limits_{A\in M} |y^*(Ax)| < +\infty$

b) M là tập bị chặn trong $\mathcal{L}(X, Y)$

Giải. b) ⇒ a) Hiển nhiên.
a) ⇒ b) Theo Bài 17, từ giả thiết ta suy ra $\sup\limits_{A\in M} ||Ax|| < +\infty, \forall x \in X$.
Do X Banach nên theo nguyên lý bị chặn đều ta có $\sup\limits_{A\in M} ||A|| < +\infty$, nghĩa là M là tập bị chặn trong $\mathcal{L}(X, Y)$. □

Bài 19. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn, $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $C_n = \{x \in X| \sup\limits_{\alpha\in I} ||A_\alpha x)|| < n\}$. Chứng minh nếu $\sup\limits_{\alpha\in I} ||A_\alpha|| = +\infty$ thì $int(C_n) = \emptyset,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.*

---

[15] Có thể chứng minh được rằng nếu $\delta \leq 1$ thì $||A|| = \sup\limits_{||x||<\delta} ||A(x)||$

[16] Xem như là một dãy trong Y^{**} vì $Y \subset Y^{**}$

[17] K Banach nên $Y^* = \mathcal{L}(Y, K)$ Banach

Giải. Giả sử có $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\text{int}(C_{n_0}) \neq \emptyset$. Khi đó có hình cầu mở $B(x_0, r) \subset C_{n_0}$. $\forall x \in X, x \neq 0$, ta có $x_0 + \frac{rx}{2||x||} \in B(x_0, r)$. Suy ra

$$||A_\alpha(x_0 + \frac{rx}{2||x||})|| < n_0$$

$$\Rightarrow ||A_\alpha(\frac{rx}{2||x||})|| < n_0 + ||A_\alpha(x_0)|| < 2n_0$$

$$\Rightarrow ||A_\alpha(x)|| < \frac{4n_0}{r}||x|| \Rightarrow ||A_\alpha|| \leq \frac{4n_0}{r}$$

Do đó $\sup\limits_{\alpha \in I} ||A_\alpha|| < +\infty$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\text{int}(C_n) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. □

Bài 20. *Cho X, Y là hai không gian định chuẩn và $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Đặt $A = \{x \in X | \sup\limits_{\alpha \in I} ||A_\alpha x|| < 1\}$. Chứng minh rằng*

a) Nếu $int(A) \neq \emptyset$ thì $\sup\limits_{\alpha \in I} ||A_\alpha|| < +\infty$ (tức $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ bị chặn đều).

b) Nếu $int(A) \neq \emptyset$ thì $0 \in int(A)$.

Giải.

a) Hoàn toàn tương tự Bài 19.

b) [18] Theo câu a) ta có $K = \sup\limits_{\alpha \in I} ||A_\alpha|| < +\infty$.
Giả sử $0 \notin \text{int}(A)$, khi đó có $x \in B(0, \frac{1}{2K})$ và $x \notin A$. Suy ra

$$\exists \alpha \in I : ||A_\alpha(x)|| \geq 1$$

Do đó

$$1 \leq ||A_\alpha(x)|| \leq ||A_\alpha|| ||x|| \leq K||x|| < K\frac{1}{2K} = \frac{1}{2}$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy $0 \in \text{int}(A)$.

□

Bài 21. *Cho X là một không gian Banach, F là một tập đóng, hấp thụ [19] chứa trong X. Chứng minh $int(F) \neq \emptyset$.*

Giải. Do F hấp thụ nên với mọi $x \in X$, ta có thể chọn $n_x \in \mathbb{N}$ sao cho $x \in n_x F$. Suy ra

$$X = \bigcup_{x \in X} n_x F.$$

Để ý rằng $\{n_x | x \in X\} \subset \mathbb{N}$ nên hợp trên là đếm được. Do X là không gian Banach nên nó thuộc phạm trù II, vì vậy tồn tại n_0 sao cho $\text{int}(\overline{n_0 F}) \neq \emptyset$.
Do F đóng nên $n_0 F$ đóng, suy ra $\text{int}(n_0 F) \neq \emptyset$, tức có hình cầu mở $B(x_0, r) \subset n_0 F, r > 0$. Từ đây ta có $B(\frac{x_0}{n_0}, \frac{r}{n_0}) \subset F$. Vì vậy $\text{int}(F) \neq \emptyset$. □

[18] Đậu Anh Hùng - K16

[19] Tập $F \subset X$ được gọi là hấp thụ nếu với mọi $x \in X$, tồn tại $\lambda > 0$ sao cho với mọi $\alpha \in K, |\alpha| \geq \lambda$ thì $x \in \alpha F$

3 Nguyên lý ánh xạ mở - Định lí đồ thị đóng

Bài 22. *Cho X là một không gian Banach, f là một phiếm hàm tuyến tính lên tục khác 0. Chứng minh f là ánh xạ mở.*

Giải. Theo nguyên lý ánh xạ mở, ta chỉ cần chứng minh f toàn ánh là đủ.
Do $f \neq 0$ nên có $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) \neq 0$.
$\forall r \in K$, đặt $x = \frac{r}{f(x_0)}.x_0$ thì $f(x) = \frac{r}{f(x_0)}.f(x_0) = r$.
Vậy f là toàn ánh. □

Bài 23. *Giả sử $||.||_1$ và $||.||_2$ là hai chuẩn trên X sao cho với mỗi chuẩn đó X là không gian Banach và $||.||_1 \leq K.||.||_2$, với K là một số dương. Chứng minh hai chuẩn này tương đương.* [20]

Giải. Do $||.||_1 \leq K.||.||_2$ nên $id : (X, ||.||_1) \longrightarrow (X, ||.||_2)$ liên tục trên X. Mặt khác, id là song ánh. Theo hệ quả của nguyên lý ánh xạ mở thì id là một phép đồng phôi. Do đó hai chuẩn này tương đương. □

Bài 24. *Kí hiệu $X = C^1_{[0,1]}$ là không gian gồm các hàm số khả vi liên tục trên $[0, 1]$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt*

$$||x||_1 = \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| + |x(0)|, \quad ||x||_2 = (\int_0^1 (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)dt)^{1/2}$$

Chứng minh $(X, ||.||_1)$ là một không gian Banach và hai chuẩn đã cho không tương đương. Suy ra $(X, ||.||_2)$ không phải là một không gian Banach.

Giải. Ta dễ dàng kiểm tra được $(X, ||.||_1)$ là một không gian Banach.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $x_n(t) = \frac{t^n}{\sqrt{n}}, t \in [0; 1]$ thì $x_n \in X$. Và ta có

$$||x_n||_1 = \max_{t\in[0;1]} |\sqrt{n}t^{n-1}| + |0| = \sqrt{n} \longrightarrow \infty \text{ khi } n \to \infty.$$

Tuy nhiên

$$||x_n||_2 = (\int_0^1 (\frac{t^{2n}}{n} + nt^{2n-2})dt)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{n(2n+1)} + \frac{n}{2n-1}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy dãy $(x_n)_n$ bị chặn trong $(X, ||.||_2)$ nhưng không bị chặn trong $(X, ||.||_1)$. Do đó hai chuẩn này không tương đương.
Tiếp theo, áp dụng công thức số gia hữu hạn ta chứng minh được

$$\forall x \in X, ||x||_2 \leq \sqrt{2}\ ||x||_1.$$

Sử dụng Bài 23 ta suy ra được $(X, ||.||_2)$ không phải là một không gian Banach. □

[20] Ta hay dùng một kết quả tương đương với bài tập này là: Nếu hai chuẩn đó không tương đương thì $(X, ||.||_1), (X, ||.||_2)$ không thể cùng Banach

Bài 25. *Cho X, Y là hai không gian Banach, $A : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ tuyến tính sao cho $y^*A \in X^*$, với mọi $y^* \in Y^*$* [21]. *Chứng minh A liên tục.*

Giải. Ta chứng minh A có đồ thị G_A đóng.
Lấy dãy $(x_n, Ax_n) \longrightarrow (x, y)$. Giả sử $y \neq Ax$. Khi đó theo hệ quả của định lí Hahn-Banach, tồn tại $g \in Y^*$ sao cho $g(Ax - y) \neq 0$.
Mặt khác ta có

$$g(Ax - y) = g(Ax - \lim_{n\to\infty} Ax_n) = g(\lim_{n\to\infty}(Ax - Ax_n)) = \lim_{n\to\infty} gA(x - x_n) = 0.$$

Điều này mâu thuẩn. Vậy $y = Ax$. Suy ra G_A đóng. Theo Định lí đồ thị đóng thì A liên tục. □

4 Định lí Hahn - Banach

Bài 26. *Cho X là không gian định chuẩn. Chứng minh rằng $\bigcap\limits_{f\in X^*} Kerf = \{0\}$.*

Giải. Lấy bất kì $x \in \bigcap\limits_{f\in X^*} Kerf$. Khi đó ta có $f(x) = 0$, với mọi $f \in X^*$. Theo hệ quả của Định lí Hahn - Banach ta có $x = 0$. □

Bài 27. *Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là n vectơ độc lập tuyến tính trong không gian định chuẩn X. Chứng minh rằng tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f(x_i) \neq f(x_j)$ khi $i \neq j$.*

Giải. Với mỗi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, đặt $L_i = \langle\{x_j | j \neq i\}\rangle$ thì L_i là không gian hữu hạn chiều nên là không gian con đóng của X. Do hệ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ độc lập tuyến tính nên $x_i \notin L_i$. Theo định lí Hahn - Banach, tồn tại $f_i \in X^*$ sao cho

$$f_i(x_i) = i \text{ và } f_i(x_j) = 0, \forall j \neq i$$ [22]

Đặt $f = f_1 + f_2 + ... + f_n$, ta có $f(x_i) = i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Do đó $f(x_i) \neq f(x_j)$ khi $i \neq j$. □

Bài 28. *Cho M là một tập con của X và $x_0 \in X$. Chứng tỏ rằng $x_0 \in \overline{\langle M\rangle}$ khi và chỉ khi với mọi $x^* \in X^*$ thỏa điều kiện $x^*(M) = \{0\}$ thì $x^*(x_0) = 0$.*

Giải. $(\Rightarrow)$: hiển nhiên.
$(\Leftarrow)$: Đặt $Y = \langle M\rangle$. Giả sử $x_0 \notin \overline{Y}$, khi đó $d(x_0, \overline{Y}) > 0$. Theo Định lí Hahn - Banach, tồn tại $x^* \in X^*$ sao cho $x^*(\overline{Y}) = \{0\}$ và $x^*(x_0) = 1$. Do $M \subset \overline{Y}$ nên $x^*(M) = \{0\}$ và $x^*(x_0) = 1$. Điều này mâu thuẩn với giả thiết. Vậy $x_0 \in \overline{Y}$ □

5 Một số đề thi Giải tích hàm

Mục này sẽ giới thiệu các đề thi Giải tích hàm của PGS.TS Nguyễn Hoàng dành cho sinh viên Đại học và học viên Cao học của Đại học sư phạm Huế trong 10 năm qua. Có thể thấy rằng sự trùng lặp các câu hỏi là dày đặc.

[21] Có thể hạn chế điều kiện này thành: Mọi dãy (x_n) trong X sao cho $x_n \longrightarrow 0$ thì $y^*(Ax_n) \longrightarrow 0$, $\forall y^* \in Y^*$

[22] Trong Định lí Hahn - Banach người ta chọn phiếm hàm $g_i \in X^*$ sao cho $g_i(x_i) = 1$. Khi đó, nếu đặt $f_i = ig_i$ thì ta được phiếm hàm f_i như trên

5.1 Dành cho sinh viên năm 4

Năm học 1997-1998

Câu I. Kí hiệu $X = \{x \in C_{[0,1]} | x(0) = x(1) = 0\}$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x|| = \max_{[0,1]} |x(t)|$$

1. Chứng minh $(X, ||.||)$ là một không gian Banach.
2. Đặt $A : X \longrightarrow X$ là ánh xạ xác định bởi $x \longmapsto Ax$, trong đó $Ax(t) = \frac{x(t)+x(1-t)}{2}$. Chứng minh $A \in \mathcal{L}(X)$ và tính $||A||$.

Câu II. Kí hiệu X là không gian Banach và Y là không gian định chuẩn.
1. Phát biểu nguyên lí bị chặn đều đối với dãy các toán tử $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Chứng minh rằng nếu với mọi $x \in X$ tồn tại $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ thì $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.
2. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Giả sử với mọi $x^* \in X^*$ ta có $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)| < +\infty$. Chứng minh $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| < +\infty$.

Câu III. Cho X là một không gian Banach.
1. Giả sử $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một phiếm hàm tuyến tính thỏa mãn điều kiện: với mọi dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $x_n \longrightarrow 0$ thì dãy $(f(x_n))_n$ bị chặn. Chứng minh $f \in X^*$.
2. Cho $f \in X^*$ và $f \neq 0$. Chứng minh rằng nếu G là tập mở trong X thì $f(G)$ là tập mở trong $\mathbb{R}$.

Câu IV. Cho H là một không gian Hilbert.
1. Cho $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một hệ trực giao trong H. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ trong H khi và chỉ khi chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2$ hội tụ.
2. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trực chuẩn của H và $(\xi_n)_n \subset \mathbb{R}$ sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $x \in H$ nhận $(\xi_n)_n$ là hệ số Fourier đối với $(e_n)_n$.
3. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trực chuẩn của H và $A \in \mathcal{L}(H)$ là một toán tử compact. Chứng minh $A(e_n) \longrightarrow 0$ trong H khi $n \longrightarrow \infty$.

Năm học 1999-2000

Câu I. Kí hiệu $X = M_{[0,1]}$ là tập các hàm số xác định và bị chặn trên $[0,1]$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x|| = \sup_{[0,1]} |x(t)|$$

1. Chứng minh $(X, ||.||)$ là một không gian Banach.
2. Đặt $A : X \longrightarrow X$ là ánh xạ xác định bởi $x \longmapsto Ax$, trong đó $Ax(t) = x(0) + tx(t)$. Chứng minh $A \in \mathcal{L}(X)$ và tính $||A||$.

Câu II. Cho X là một không gian định chuẩn.
1. Cho $f \in X^*$ thỏa mãn điều kiện $\sup\limits_{x,y\in B'(0,1)} |f(x) - f(y)| = r$. Tính $||f||$.
2. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là n vectơ độc lập tuyến tính trong không gian định chuẩn X.

Chứng minh rằng tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f(x_i) \neq f(x_j)$ khi $i \neq j$.
Câu III. Cho X là một không gian định chuẩn và $f \in X^*$. Chứng minh f liên tục trên X khi và chỉ khi $\{x \in X | f(x) = 1\}$ là một tập đóng trong X.
Câu IV. Cho H là một không gian Hilbert.
1. Cho A là một tập con khác rỗng của H. Đặt $M = \overline{\langle A \rangle}$. Giả sử $x \in H$ và $\langle x, y \rangle = 0$, với mọi $y \in A$. Chứng minh $x \in M^\perp$.
2. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trục chuẩn trong H. Chứng minh rằng với mọi $x \in H$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ hội tụ và $||x||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$. Suy ra $e_n \xrightarrow{w} 0$.
3. Đặt $A : H \longrightarrow H$ xác định bởi

$$\forall x \in H, Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Chứng minh $A \in \mathcal{L}(H)$, tính $||A||$ và tìm toán tử liên hiệp của A.

Năm học 2000-2001

Câu I. Kí hiệu $X = \{x \in C_{[0,1]} | x(0) = x(1) = 0\}$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x|| = \max_{[0,1]} |x(t)|$$

1. Chứng minh $(X, ||.||)$ là một không gian Banach.
2. Đặt $A : X \longrightarrow X$ là ánh xạ xác định bởi $x \longmapsto Ax$, trong đó $Ax(t) = \frac{x(t)+x(1-t)}{2}$. Chứng minh $A \in \mathcal{L}(X)$ và tính $||A||$.
Câu II. Cho X, Y là hai không gian định chuẩn, $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}(x, Y)$. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương

a) $\forall x \in X,\ \forall y^* \in Y^* : \sup\limits_{\alpha \in I} |y^*(A_\alpha x)| < +\infty$

b) $\forall x \in X : \sup\limits_{\alpha \in I} ||Ax|| < +\infty$

Câu III. Cho X là một không gian Banach.
1. Giả sử $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một phiếm hàm tuyến tính sao cho $f^{-1}(-\infty, 0)$ và $f^{-1}(0, +\infty)$ là mở trong X. Chứng minh $f \in X^*$.
2. Cho $f \in X^*$ và $f \neq 0$. Chứng minh rằng nếu G là tập mở trong X thì $f(G)$ là tập mở trong $\mathbb{R}$.
Câu IV. Cho H là một không gian Hilbert.
1. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trực chuẩn của H và $(\xi_n)_n \subset \mathbb{R}$ sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $x \in H$ nhận $(\xi_n)_n$ là hệ số Fourier đối với $(e_n)_n$.
2. Cho $A \in \mathcal{L}(H)$ là một toán tử compact và $\lambda \neq 0$ là một giá trị riêng của A. Chứng minh rằng tập

$$\mathcal{N}(A_\lambda) = \{x \in H | Ax = \lambda x\}$$

là một không gian con hữu hạn chiều của H.
3. Cho M, N là hai không gian con đóng của H sao cho $M \perp N$. Chứng minh $M + N$ là không gian con đóng của H.

Năm học 2001-2002

Câu I. Cho $(X, ||.||_1)$, $(Y, ||.||_2)$ là hai không gian định chuẩn. Đặt $Z = X \times Y$. Với mỗi $z = (x, y) \in Z$, ta đặt

$$||z|| = ||x||_1 + ||y||_2$$

1. Chứng minh $||.||$ là một chuẩn trên Z.
2. Chứng minh $(Z, ||.||)$ là một không gian Banach khi và chỉ khi X và Y Banach.

Câu II. Cho $e_1, e_2, ..., e_n$ là n vectơ độc lập tuyến tính trong không gian định chuẩn X.
1. Chứng minh rằng tồn tại các phiếm hàm $f_i \in X^*, i = 1, ..., n$ sao cho $f_i(e_j) = \delta_{ij}$.
2. Kí hiệu $M = \langle\{e_1, e_2, ..., e_n\}\rangle$ và đặt $A : X \longrightarrow X, Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$. Chứng minh $A \in \mathcal{L}(X)$ và $X = M \oplus KerA$.
3. Giả sử $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là phiếm hàm tuyến tính thỏa mãn điều kiện $\{x \in X | f(x) \geq 1\}$ là một tập đóng trong X. Chứng minh $f \in X^*$.

Câu III. Cho H là một không gian Hilbert.
1. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trực chuẩn của H. Chứng minh trực tiếp hai mệnh đề sau là tương đương
a) $\forall x \in H, x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.
b) $\forall x \in H, ||x||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.
2. Cho $u, v \in H$ và $A : H \longrightarrow H$ xác định bởi

$$\forall x \in H, Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u\rangle v$$

Chứng minh $A \in \mathcal{L}(H)$ và tìm toán tử liên hiệp của A.
3. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trực chuẩn của H. Cho $B \in \mathcal{L}(H)$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||Be_n||^2$ hội tụ. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt $B_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle Be_k, \forall x \in H$. Chứng minh B_n là toán tử compact, suy ra B cũng là toán tử compact.

Năm học 2002-2003

Câu I. Kí hiệu $X = M^0_{[0,1]}$ là tập các hàm số xác định và bị chặn trên $[0, 1]$ sao cho $x(0) = x(1) = 0$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x|| = \sup_{[0,1]} |x(t)|$$

1. Chứng minh $(X, ||.||)$ là một không gian Banach.
2. Đặt $A : X \longrightarrow X$ là ánh xạ xác định bởi $x \longmapsto Ax$, trong đó $Ax(t) = x(1-t) - tx(t)$. Chứng minh $A \in \mathcal{L}(X)$ và tính $||A||$.

Câu II. Cho X, Y là hai không gian định chuẩn và $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

1. Xét hai phương trình

$$Ax = y \quad (1) \qquad \text{và} \qquad A^*y^* = x^* \quad (2)$$

Giả sử rằng với mọi $y \in Y$, phương trình (1) (ẩn là x) có ít nhất một nghiệm trong X. Chứng minh rằng với mọi $x^* \in X^*$, phương trình (2) (ẩn là y^*) có nhiều nhất một nghiệm trong Y^*.
2. Giả sử $x_0 \in X$ và $\sup\limits_{x,y \in B'(x_0,r)} ||Ax - Ay|| = \alpha$. Tính ||A||.
Câu III. Cho f là một phiếm hàm tuyến tính trên không gian định chuẩn thực X. Chứng minh rằng f liên tục khi và chỉ khi tập $\{x \in X | f(x) > 0\}$ là mở trong X.
Câu IV. Cho H là một không gian Hilbert.
1. Cho A là một tập con khác rỗng của H. Đặt $M = \overline{\langle A \rangle}$. Giả sử $x \in H$ và $\langle x, y \rangle = 0$, với mọi $y \in A$. Chứng minh $x \in M^{\perp}$.
2. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trục chuẩn trong H. Chứng minh trực tiếp rằng với mọi $x \in H$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ hội tụ và $||x||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$. Suy ra nếu $C \in \mathcal{L}(H)$ là toán tử compact thì $Ce_n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$.
3. Đặt $A : H \longrightarrow H$ xác định bởi

$$\forall x \in H, Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1}$$

Chứng minh $A \in \mathcal{L}(H)$ và tìm toán tử liên hiệp của A.

Năm học 2003-2004

Câu I. Kí hiệu $X = M_{[0,1]}$ là tập các hàm số xác định và bị chặn trên $[0,1]$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x|| = \sup_{[0,1]} |x(t)|$$

1. Chứng minh $(X, ||.||)$ là một không gian Banach.
2. Kí hiệu $Y = \{x \in C_{[0,1]} | x(0) = x(1) = 0\}$. Chứng minh Y là một không gian con đóng của X.
Câu II. Cho X là một không gian định chuẩn thực.
1. Cho $f : X \longrightarrow K$ là một phiếm hàm tuyến tính thỏa mãn

$$\sup_{x,y \in B'(0,1)} |f(x) - f(y)| = r$$

Chứng minh $f \in X^*$ và tính $||f||$.
2. Giả sử $(x_n)_n$ và $(f_n)_n$ là hai dãy cơ bản trong X và X^*. Chứng minh rằng $(f_n(x_n))_n$ là một dãy hội tụ.
Câu III. Cho $f : X \longrightarrow K$ là một phiếm hàm tuyến tính khác 0.

a) Đặt $N = Kerf$. Chứng minh rằng $N = \overline{N}$ hoặc $\overline{N} = X$.

b) Chứng minh rằng nếu $\dim X = \infty$ thì tồn tại các phiếm hàm tuyến tính không liên tục xác định trên X.

Câu IV. Cho H là một không gian Hilbert trên trường K.
1. Cho $A : H \longrightarrow H$ là một toán tử tuyến tính. Giả sử $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ với mọi $x, y \in H$. Chứng minh A liên tục.
2. Cho $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một hệ các vectơ trực giao khác 0 của H. Chứng minh rằng với mọi $x \in H$, tồn tại duy nhất các số $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sao cho với mọi $\beta_1, ..., \beta_n$, ta có

$$||x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leq ||x - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i||$$

3. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trực chuẩn của H. Đặt $B : H \longrightarrow H$ xác định bởi

$$\forall x \in H, Bx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{n+1}\rangle e_n$$

Chứng minh $B \in \mathcal{L}(H)$, tính $||B||$ và tìm toán tử liên hiệp của B.

Năm học 2004-2005

Câu I. Kí hiệu $X = \{x \in C_{[0,1]} | x(0) = x(1) = 0\}$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x|| = \max_{[0,1]} |x(t)|$$

1. Chứng minh $||.||$ là một chuẩn trên X.
2. Chứng minh $(X, ||.||)$ là một không gian Banach.
3. Đặt $A : X \longrightarrow X$ là ánh xạ xác định bởi $x \longmapsto Ax$, trong đó $Ax(t) = x(t) + x(1-t)$. Chứng minh $A \in \mathcal{L}(X)$ và tính $||A||$.

Câu II. Cho X, Y là hai không gian định chuẩn, $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Chứng minh các khẳng định sau là tương đương

a) $\forall x \in X,\ \forall y^* \in Y^* : \sup_{\alpha \in I} |y^*(A_\alpha x)| < +\infty$

b) $\forall x \in X : \sup_{\alpha \in I} ||Ax|| < +\infty$

Câu III. Cho X là một không gian Banach và $A \in \mathcal{L}(X)$. Giả sử tồn tại số dương r sao cho $r||x|| \leq ||Ax||$, với mọi $x \in X$. Chứng minh:
1. $A(X)$ là một không gian con đóng của X.
2. A là một phép đồng phôi tuyến tính từ X lên $A(X)$.

Câu IV. Cho H là một không gian Hilbert.
1. Giả sử E là một tập con của H và $x_0 \in H$. Đặt $M = \overline{\langle E\rangle}$. Chứng minh $x_0 \in M$ khi và chỉ khi với mọi $y \in E^\perp$ thì $\langle y, x_0\rangle = 0$.
2. Cho $A, B : H \longrightarrow H$ là hai toán tử tuyến tính thỏa mãn điều kiện $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ với mọi $x, y \in H$. Chứng minh A, B liên tục và $B = A^*$.

3. Giả sử $A \in \mathcal{L}(H)$ là một toán tử compact và λ là một số khác 0. Chứng minh rằng $Ker(A - \lambda I)$ là một không gian con hữu hạn chiều của H.

Năm học 2005-2006

Câu I. Kí hiệu $X = M_{[0,1]}$ là tập các hàm số xác định và bị chặn trên $[0, 1]$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x|| = \sup_{[0,1]} |x(t)|$$

1. Chứng minh $(X, ||.||)$ là một không gian Banach.
2. Đặt $A : X \longrightarrow X$ là ánh xạ xác định bởi $x \longmapsto Ax$, trong đó $Ax(t) = x(0) - t^2x(t)$. Chứng minh $A \in \mathcal{L}(X)$ và tính $||A||$.

Câu II. Cho X là một không gian định chuẩn.
1. Cho $f \in X^*$ thỏa mãn điều kiện $\sup\limits_{x,y \in B'(0,1)} |f(x) - f(y)| = r$. Hãy tính $||f||$.
2. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là n vectơ độc lập tuyến tính trong không gian định chuẩn X. Chứng minh rằng tồn tại $g \in X^*$ sao cho $g(x_i) \neq g(x_j)$ khi $i \neq j$.

Câu III. Cho X là một không gian định chuẩn và M là một tập con của X. Giả sử với mọi $f \in X^*$ ta có $\sup\limits_{x \in M} |f(x)| < +\infty$. Chứng minh rằng M là tập bị chặn trong X.

Câu IV. Cho H là một không gian Hilbert.
1. Cho A là một tập con khác rỗng của H. Đặt $M = \overline{\langle A \rangle}$. Giả sử $x \in H$ và $\langle x, y \rangle = 0$, với mọi $y \in A$. Chứng minh $x \in M^{\perp}$.
2. Cho $(e_n)_n$ là một cơ sở trực chuẩn trong H. Đặt $M = \langle \{e_n | n \in \mathbb{N}\} \rangle$. Chứng minh trực tiếp rằng hai mệnh đề sau là tương đương
a) $\forall x \in H, x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.
b) $M^{\perp} = \{0\}$.
3. Cho $u, v \in H$ là hai vectơ cố định và $A : H \longrightarrow H$ xác định bởi

$$\forall x \in H, Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u \rangle v$$

Chứng minh $A \in \mathcal{L}(H)$ .Tìm toán tử liên hiệp A^* và tính $||A^*||$.

5.2 Dành cho học viên cao học

5.2.1 Đề kiểm tra giữa kì

KHÓA 13

Câu I. Cho X là một không gian Banach, Y là một không gian định chuẩn và M là một tập con của $L(X, Y)$. Chứng minh rằng M là tập bị chặn trong không gian $L(X, Y)$ khi và chỉ khi với mọi $x \in X, y^* \in Y^*$ ta có $\sup\limits_{A \in M} |y^*(Ax)| < +\infty$.

Câu II. Cho X là một không gian định chuẩn.

1) Giả sử $f \in X^*, f \neq 0$. Chứng tỏ rằng tồn tại không gian con một chiều E sao cho $X = E \oplus \mathrm{Ker} f$.

2) Cho M là một tập con của X và $x_0 \in X$. Chứng tỏ rằng $x_0 \in \overline{\langle M \rangle}$ khi và chỉ khi với mọi $x^* \in X^*$ thỏa điều kiện $x^*(M) = \{0\}$ thì $x^*(x_0) = 0$.

Câu III. Cho X, Y là hai không gian định chuẩn.

1) Giả sử $A : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ thỏa mãn điều kiện $A(x+y) = Ax + Ay$, với mọi $x, y \in X$ và $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} ||Ax|| < +\infty$. Chứng minh A là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

2) Cho $B : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ tuyến tính. Gọi G_B là đồ thị của B. Chứng minh rằng $B(X)$ là tập đóng trong Y khi và chỉ khi tập $G_B + (X \times \{0\})$ là tập đóng trong $X \times Y$.

KHÓA 14

Câu I. Kí hiệu $X = C^1_{[0,1]}$ là không gian gồm các hàm số khả vi liên tục trên $[0,1]$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x||_1 = \max_{t \in [0,1]} |x'(t)| + |x(0)|, \quad ||x||_2 = (\int_0^1 (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2) dt)^{1/2}$$

1. Kiểm tra $||.||_1, ||.||_2$ là hai chuẩn trên X.

2. Chứng minh $(X, ||.||_1)$ là một không gian Banach và hai chuẩn đã cho không tương đương. Suy ra $(X, ||.||_2)$ không phải là một không gian Banach.

Câu II. Cho X là một không gian Banach, Y là một không gian định chuẩn và $A \in L(X, Y)$. Biết rằng với mọi $r > 0$ ta có $B'(0_Y, r) \subset \overline{A(B(0_X, r))}$. Chứng minh 0_Y là điểm trong của $A(B(0_X, r))$.

Câu III. Cho X là hai không gian định chuẩn và $A : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục. Gọi G_A là đồ thị của A. Chứng minh rằng $A(X)$ là tập đóng trong X khi và chỉ khi tập $G_A + (X \times \{0\})$ là tập đóng trong $X \times X$.
Tìm một ví dụ về một không gian định chuẩn X và $A \in L(X)$ nhưng $A(X)$ không đóng trong X.

KHÓA 15

Câu I.

1. Với $p \geq 1$, ta kí hiệu $L^p_n = \{f \in L^p(\mathbb{R}) | \mathrm{supp} f \subset [-n, n]\}$. Chứng minh rằng

$$L^p(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L^p_n}$$

2. Giả sử (X, μ) là một không gian độ đo, $E \subset X$ sao cho $\mu E < \infty$. Cho $f \in L^\infty(E, \mu)$. Chứng minh $f \in L^p(E, \mu)$ với mọi $p \geq 1$ và

$$\lim_{p \to \infty} (\int_E |f|^p d\mu)^{1/p} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)|$$

Câu II. Cho X là một không gian Banach, Y là một không gian định chuẩn và $A \in L(X, Y)$. Biết rằng với mọi $r > 0$ ta có $B'(0_Y, r) \subset \overline{A(B(0_X, r))}$. Chứng minh 0_Y là điểm trong của $A(B(0_X, r))$.

Câu III. Cho X là một không gian Banach, F là một tập đóng, hấp thụ chứa trong X.

1. Chứng minh $\text{int}(F) \neq \emptyset$.
2. Bằng ví dụ, chứng tỏ rằng F không nhất thiết nhận vectơ 0 là điểm trong.

KHÓA 16 - I

Câu I. Kí hiệu $X = C_{[0,1]}$ là không gian gồm các hàm số liên tục trên $[0, 1]$. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$||x||_\infty = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|, \quad ||x||_p = (\int_0^1 |x(t)|^p dt)^{1/p}, p > 1$$

Chứng minh hai chuẩn đã cho không tương đương. Suy ra $(X, ||.||_p)$ không phải là một không gian Banach.

Câu II. Cho X, Y là hai không gian định chuẩn $A : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ tuyến tính.

1) Chứng minh A liên tục khi và chỉ khi A biến mỗi tập bị chặn trong X thành một tập bị chặn trong Y.

2) Giả sử X, Y là hai không gian Banach, A liên tục và tồn tại $\lambda > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ ta có $||Ax|| \geq \lambda ||x||$. Chứng minh $A(X)$ là một không gian Banach.

Câu III. Tìm một ví dụ về một không gian định chuẩn X có chứa một không gian con Y mà Y không phải là tập đóng trong X.

KHÓA 16 - II

Câu I. Cho $f : X \longrightarrow K$ là một phiếm hàm tuyến tính.

a) Giả sử $f \neq 0$. Chứng minh tồn tại không gian con một chiều E sao cho $X = Kerf \oplus E$.

b) Biết rằng phiếm hàm f không liên tục. Chứng minh $Kerf$ là tập trù mật khắp nơi.

Câu II. [23] Cho X, Y là hai không gian định chuẩn và $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Xét hai phương trình

$$Ax = y \quad (1) \qquad \text{và} \qquad A^*y^* = x^* \quad (2)$$

Giả sử rằng với mọi $y \in Y$, phương trình (1) (ẩn là x) có ít nhất một nghiệm trong X. Chứng minh rằng với mọi $x^* \in X^*$, phương trình (2) (ẩn là y^*) có nhiều nhất một nghiệm trong Y^*.

Câu III. Cho X là không gian định chuẩn và $M \subset X, N \subset X^*$. Kí hiệu $M^\perp = \{x^* \in X^* | x^*(M) = \{0\}\}$ và $^\perp N = \{x \in X | x(N) = \{0\}\}$.

a) Chứng minh $M^\perp$ và $^\perp N$ là những không gian vectơ con đóng trong các không gian X^* và X.

b) Chứng minh rằng $\overline{\langle M \rangle} = {}^\perp(M^\perp)$.

KHÓA 16 - III

Câu I. Cho H là một không gian tiền Hilbert trên trường K và $x, y \in H$. Giả sử với mọi $\lambda \in K$, ta có $||x + \lambda y|| \geq ||x||$. Chứng minh $x \perp y$.

Câu II. Cho H là một không gian Hilbert *thực* và A là một toán tử liên tục tự liên hiệp.

a) Chứng minh rằng $\langle Au, v \rangle = \frac{1}{4}(\langle A(u+v), u+v \rangle - \langle A(u-v), u-v \rangle)$, với mọi $u, v \in H$.

b) Chứng minh rằng nếu $\langle Ax, x \rangle = 0$ với mọi $x \in H$ thì $A = 0$.

c) Giả sử thêm A là toán tử compact. Chứng minh rằng $\sigma(A)$ là bao đóng của tập các giá trị riêng của A.

Câu III. Cho X là một không gian Banach và $A \in \mathcal{L}(X)$. Chứng minh rằng $\sigma(A) = \sigma(A^*)$. Nếu X là không gian Hilbert thì đẳng thức này còn đúng không? Tại sao?

5.2.2 Đề thi chứng chỉ cao học

[23] Đây là một dạng phát biểu khác của Bài 20 - trang 92 - sách *Bài tập Giải tích hàm - Nguyễn Xuân Liêm*

ĐỀ THI CHỨNG CHỈ CAO HỌC [24]

GIẢI TÍCH HÀM - KHÓA 16

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I. Cho X là một không gian định chuẩn vô hạn chiều.

1. Chứng minh rằng tồn tại một phiếm hàm tuyến tính không liên tục f xác định trên X. Khi đó, hãy kiểm tra tập $P = \{x \in X | f(x) < 1\}$ trù mật trong X.

2. Chứng minh rằng tồn tại hai tập lồi A, B chứa trong X sao cho $A \cup B = X, A \cap B = \emptyset$ và $\overline{A} = X = \overline{B}$.

Câu II. Cho X, Y, Z là ba không gian vectơ trên trường K.

1. Giả sử $f : X \longrightarrow Y, g : X \longrightarrow Z$ là các ánh xạ tuyến tính sao cho $\mathrm{Ker} g \subset \mathrm{Ker} f$. Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ tuyến tính $h : Z \longrightarrow Y$ sao cho $f = h \circ g$.

2. Lấy $Y = K, Z = K^n$ và chọn ánh xạ g thích hợp, áp dụng câu 1 để chứng minh rằng nếu $f, f_1, ..., f_n$ là các phiếm hàm tuyến tính trên X sao cho $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Kerf_i \subset Kerf$ thì f là một tổ hợp tuyến tính của các $f_1, ..., f_n$.

3. Cho X là một không gian định chuẩn vô hạn chiều và $\mathcal{U}$ là một lân cận yếu, tức là một $\sigma(X, X^*)-$lân cận, của $0 \in X$. Chứng minh rằng $\mathcal{U}$ là một tập không bị chặn trong không gian định chuẩn X.

Câu III. Cho X là một không gian định chuẩn.

1. Giả sử M là một tập con trù mật trong X. Chứng minh rằng với mọi $x \in X$, tồn tại dãy $(x_n)_n \subset M$ sao cho $||x_n|| \leq \frac{4}{3^n}||x||, n = 1, 2, ...$ và $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

2. Cho $(x_n)_n$ là một dãy trong X sao cho $\sup\limits_n ||x_n|| < +\infty$. Kí hiệu $E = \{f \in X^* | (f(x_n))_n$ hội tụ $\}$. Biết $\overline{E} = X^*$, chứng minh tồn tại $x \in X$ sao cho $x_n \xrightarrow{w} x$.

Câu IV. Cho H là một không gian Hilbert trên trường K và $A \in \mathcal{L}(H)$.

1. Giả sử $A = A^*$ và $\lambda \in K$ sao cho $\inf\limits_{||x||=1} ||Ax - \lambda x|| > 0$. Chứng minh λ là một giá trị chính quy của A.

2. Giả sử A^*A là toán tử compact. Chứng minh A cũng là toán tử compact.

Ghi chú: Thí sinh được phép sử dụng tài liệu khi làm bài.

[24] *June 12nd, 2008*