

**Bài 1: (3 điểm)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + \ln y = y + \ln x \\ \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{y^2 - 2} = 4 \end{cases}$$

**Bài 2:(3 điểm)**

Giả sử  $a \neq \pm 1, a \in R$ . Tìm hàm  $f(x)$  xác định với  $x \neq 1$  sao cho thoả mãn phương trình :  $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + \phi(x)$ , trong đó  $\phi(x)$  là hàm cho trước xác định với  $x \neq 1$

**Bài 3:(3 điểm)**

Cho góc xOy. Điểm A di động trên Ox, điểm B di động trên Oy sao cho  $OA + OB = a$  không đổi. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

**Bài 4: (3 điểm) :**

Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình :  $2^x + 5^y = z!$

**Bài 5:(3 điểm)**

Cho  $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$  là hàm số liên tục và có đạo hàm  $f'(x)$  thoả mãn  $|f'(x)| < m$  với mọi  $x \in (0,1)$ ,  $m$  là số thực dương cho trước và  $m < 1$ .

1. Chứng minh rằng phương trình  $f(x) = x$  có đúng một nghiệm trên  $[0,1]$ . Gọi nghiệm đó là  $a$ .

2. Với  $x_1 \in [0,1]$  là số thực cho trước, xét dãy số  $\{x_n\}$  cho bởi  $x_{n+1} = f(x_n)$  với  $n$  nguyên dương. Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Bài 6:(3 điểm)**

Giả sử  $P(x)$  là tam thức bậc hai thoả mãn :

$$0 \leq P(-1) \leq 1; 0 \leq P(0) \leq 1; 0 \leq P(1) \leq 1$$

Chứng minh rằng  $P(x) \leq \frac{9}{8}$  với mọi  $x \in [0,1]$

**Bài 7:(2 điểm)**

Cho một lục giác lồi có tính chất sau: khoảng cách giữa các trung điểm của bất cứ hai cạnh đối diện nào của lục giác đó cũng bằng tổng độ dài của hai cạnh đó nhân với  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Chứng minh rằng tất cả các góc của lục giác đó bằng nhau.

-----HẾT-----

**A. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM**

**Bài 1:(3 ĐIỂM )**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + \ln y = y + \ln x \\ \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{y^2 - 2} = 4 \end{cases}$$

Giải: Đ/k  $x, y \geq \sqrt{2}$  **0,5đ**

Pt đầu  $\Leftrightarrow x - \ln x = y - \ln y$  .(1) **0,5đ**

Xét h/s  $f(t) = t - \ln t$  trên  $[\sqrt{2}; +\infty)$ ,  $f(t)$  liên tục và có  $f'(t) > 0$  nên  $f(t)$  đồng biến.

Do đó (1)  $\rightarrow x = y$  . **1,0đ**

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là  $x = y = \sqrt{6}$  **0,5đ**

**Bài 2:(3 ĐIỂM )**

Giả sử  $a \neq \pm 1, a \in R$ . Tìm hàm  $f(x)$  xác định với  $x \neq 1$  sao cho thoả mãn phương trình :

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + \phi(x)$$

trong đó  $\phi(x)$  là hàm cho trước, xác định với  $x \neq 1$

Giải : Đặt  $y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$ , từ đó : **1,0đ**

$$\begin{aligned} f(y) &= af\left(\frac{y}{y-1}\right) + \phi\left(\frac{y}{y-1}\right) = a[af(y) + \phi(y)] + \phi\left(\frac{y}{y-1}\right) \\ &= a^2 f(y) + a\phi(y) + \phi\left(\frac{y}{y-1}\right) \end{aligned} \quad \text{1,0đ}$$

Từ đó suy ra

$$f(y) = \frac{a\phi(y) + \phi\left(\frac{y}{y-1}\right)}{1-a^2} \quad \text{1,0đ}$$

Kiểm tra hàm  $f(y)$  thoả mãn PT đang xét và  $y \neq 1$

**Bài 3:(3 ĐIỂM )**

Cho góc xOy. Điểm A di động trên Ox , điểm B di động trên Oy sao cho  $OA + OB = a$  không đổi. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Giải : Lấy  $C \in Ox$  và  $D \in Oy$  sao cho  $OC = OD = a$

Gọi L , K lần lượt là trung điểm của OC, OD

Do  $OA + OB = a$  nên  $OA = BD$  (1)

Qua L và K kẻ các đường trung trực của OC, OD. Hai trung trực này cắt nhau tại I (I cố định).

Hai tam giác vuông OKI và OLI bằng nhau (vì OI chung,  $OK = OL = \frac{a}{2}$ )

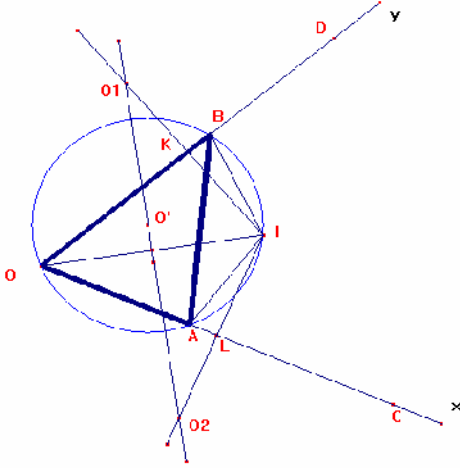
nên  $IK = IL$  (2)

Mặt khác do  $OA + OB = OL + OK = a$  nên  $AL = BK$  (3)

Do (2) và (3) nên hai tam giác vuông BKI=ALI.

Nên  $AI = IB$ .

**1,0đ**



Do 2 tam giác vuông  $BKI = ALI$

nên:  $\widehat{OBI} = \widehat{LAI}$

hay  $\widehat{OBI} + \widehat{OAI} = 180^\circ$

Do đó tứ giác OAIB là tứ giác nội tiếp.

Do O và I là 2 điểm cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB phải nằm trên đường trung trực của OI. **1,0đ**

Khi  $A \equiv O$  thì  $B \equiv D$  khi đó tâm

đường tròn ngoại tiếp tứ giác OAIB là  $O_1$  (giao điểm 2 đường trung trực của OI và của OD)

Khi  $B \equiv O$  thì  $A \equiv C$  khi đó tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác

OAIB là  $O_2$  (giao điểm 2 đường trung trực của OI và của OC)

**0,5đ**

Đảo lại : Lấy  $O'$  bất kỳ trên đoạn  $O_1O_2$  vẽ đường tròn tâm  $O'$

bán kính  $O'O$  cắt tia  $Ox$  tại A,  $Oy$  tại B ta chứng minh  $OA + OB = a$ .

Ta có  $O'O = O'I$  nên tứ giác OAIB nội tiếp đường tròn ( $O'$ )

Hai tam giác vuông  $ALI = BKI$  ( vì  $IL = IK$ , góc  $IAL =$  góc  $IBK$ )

nên  $AL = BK$ .

Nên ta có  $OA + OB = (OL - AL) + (OK + KB) = OL + OK = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$ .

**0,5đ**

#### Bài 4:(3 ĐIỂM )

Tim nghiệm nguyên không âm của phương trình :  $2^x + 5^y = z!$  (1)

Giải :

-Nhận thấy nếu  $x, y$  dương thì  $z > 2$  khi đó do  $2^x$  và  $z!$  đều chia hết cho 2 mà  $5^x$  không chia hết cho 2 nên nếu  $(x, y, z)$

là nghiệm thì  $x$  hay  $y$  phải bằng 0

**0,5đ**

- Nếu  $x = 0$  thì (1)  $\Rightarrow 1 + 5^y = z!$  .Nếu  $y > 1$  thì  $z > 5$  khi đó về trái chia cho 5 dư 1 còn về phải chia hết cho 5 nên

$(0, y, z)$  với  $y > 1$  không thể là nghiệm phương trình.

**0,5đ**

-Nếu  $y = 0$  thì  $z = 2$  .  $\Rightarrow (0, 0, 2)$  là nghiệm .Nếu  $y = 1$  thì  $z = 3 \Rightarrow$

$(0, 1, 3)$  là nghiệm .

**0,5đ**

- Nếu  $y = 0$  thì (1)  $\Rightarrow 2^x + 1 = z!$  khi đó  $z > 1$  nên về phải chia hết cho 2 do đó phải có  $x = 0$  .  $\Rightarrow z = 2$ .

**0,5đ**

- Tóm lại phương trình chỉ có 2 nghiệm nguyên không âm là  $(0, 0, 2)$  và  $(0, 1, 3)$  .

**1,0đ**

#### Bài 5:(3 ĐIỂM )

Cho  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  là hàm số liên tục và có đạo hàm  $f'(x)$  thỏa mãn  $|f'(x)| < m$  với mọi  $x \in (0, 1)$  ,  $m$  là số thực dương cho trước và  $m < 1$ .

1.Chứng minh rằng phương trình  $f(x) = x$  có đúng một nghiệm trên  $[0, 1]$  .Gọi nghiệm đó là a .

2.Với  $x_1 \in [0, 1]$  là số thực cho trước, xét dãy số  $\{x_n\}$  cho bởi  $x_{n+1} = f(x_n)$  với  $n$  nguyên dương.Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  .

Giải :

1.+Xét hàm số  $g(x) = f(x) - x$  ta có  $g(x)$  liên tục và

có  $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$  do đó  $g(x)$  nghịch biến trên  $[0, 1]$  .

**0,5đ**

+Nếu  $g(0) = 0$  hay  $g(1) = 0$  thì ta có đpcm .

**0,5đ**

+Nếu  $g(0)$  và  $g(1)$  đồng thời khác không thì  $g(0) > 0$  và  $g(1) < 0$  từ đó do tính liên tục và đơn điệu của  $g(x)$  suy ra có đúng một giá trị  $x \in [0,1]$  để  $g(x) = 0$  hay pt  $f(x) = x$  có đúng một nghiệm  $x = a \in [0,1]$

0,5đ

2.+Nếu  $x_1 = a$  thì ta có  $x_n = a$  với mọi  $n$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

+Nếu  $x_1$  khác  $a$  thì từ  $x_1 \in [0,1]$  suy ra  $x_n \in [0,1]$  và  $x_n$  khác  $a$  với mọi  $n$  do đó theo định lý Lagrăng tồn tại số thực  $c$  nằm giữa  $x_n$  và  $a$  để  $f(x_n) - f(a) = f'(c)(x_n - a)$

$$\rightarrow x_{n+1} - a = f'(c)(x_n - a) \rightarrow |x_{n+1} - a| \leq m|x_n - a|$$

0,5đ

+Mặt khác do  $|x_n - a| \leq 1$  nên bằng qui nạp ta chứng minh được  $|x_n - a| < m^{n-1}$  với  $n > 2$

0,5đ

+Do  $0 < m < 1$  và  $0 \leq |x_n - a| \leq m^{n-1} \rightarrow 0$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Kết luận  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

0,5đ

### Bài 6:(3 ĐIỂM)

Giả sử  $P(x)$  là tam thức bậc hai thoả mãn  
 $0 \leq P(-1) \leq 1; 0 \leq P(0) \leq 1; 0 \leq P(1) \leq 1$

Chứng minh rằng  $P(x) \leq \frac{9}{8}$  với mọi  $x \in [0,1]$

Giải : Đặt  $Q(x) = P(x) - \frac{1}{2}$  khi đó :

0,5đ

$$|Q(-1)| \leq \frac{1}{2}, |Q(0)| \leq \frac{1}{2}, |Q(1)| \leq \frac{1}{2}$$

0,5đ

Theo công thức nội suy Lagrange có :

$$Q(x) = \frac{x(x-1)}{2}Q(-1) + (1-x^2)Q(0) + \frac{x(x+1)}{2}Q(1)$$

0,5đ

Từ đó với  $x \in [-1,1]$  ta có :

$$\begin{aligned} Q(x) &\leq \left| \frac{x(x-1)}{2} \right| \cdot \frac{1}{2} + |1-x^2| \cdot \frac{1}{2} + \left| \frac{x(x+1)}{2} \right| \cdot \frac{1}{2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} \left[ \left| \frac{x(x-1)}{2} \right| + |1-x^2| + \left| \frac{x(x+1)}{2} \right| \right] \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

0,5đ

Giá trị lớn nhất của hàm bên trong dấu ngoặc trên đoạn

$[0,1]$  là  $\frac{5}{4}$ .

0,5đ

$$\text{Vì vậy } P(x) = \frac{1}{2} + Q(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$$

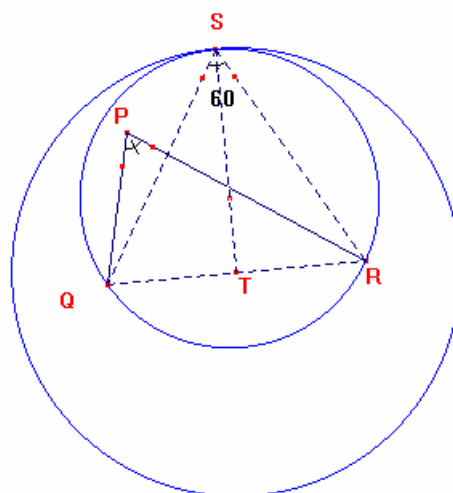
0,5đ

với  $x \in [0,1]$

### Bài 7:(2 ĐIỂM)

Cho một lục giác lồi có tính chất sau : khoảng cách giữa các trung điểm của bất cứ hai cạnh đối diện nào của lục giác đó cũng bằng tổng độ dài của

hai cạnh đó nhân với  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Chứng minh rằng tất cả các góc của lục giác đó bằng nhau.



Giải: Bổ đề “Xét tam giác PQR có góc  $\widehat{QPR} \geq 60^\circ$  và T là trung điểm của cạnh QR. Chứng minh  $PT \leq QR \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”

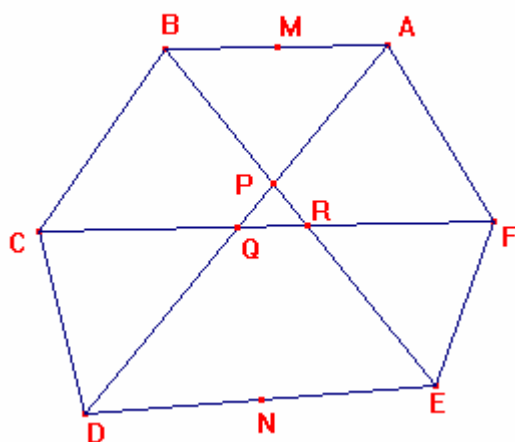
Gọi S là điểm nằm cùng phía với P đối với đường thẳng QR sao cho QRS là tam giác đều. Khi đó điểm P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác đều QRS và đường tròn (QRS) này tiếp xúc trong với đường tròn tâm T bán kính  $TS = QR \frac{\sqrt{3}}{2}$ , Do đó

$$TP \leq TS = QR \frac{\sqrt{3}}{2} . \quad \mathbf{1,0đ}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $P \equiv S$ , tức tam giác PQR đều.

Trở lại bài toán đã cho : các đường chéo chính của một lục giác lồi tạo thành một tam giác, hay đặc biệt có thể đồng qui( lúc đó tam giác suy biến thành một điểm )

Bởi thế ta có thể chọn hai trong ba đường chéo đó tạo thành một góc lớn hơn hoặc bằng  $60^\circ$



Không mất tính tổng quát, có thể giả sử rằng các đường chéo AD và BE của lục giác ABCDEF được xét cắt nhau ở điểm P sao cho  $\widehat{APB} \geq 60^\circ$ . Khi đó sử dụng bổ đề trên và giải thiết của bài toán ta có

$$MN = (AB + DE) \frac{\sqrt{3}}{2} \geq PM + PN \geq MN \quad (\text{Trong}$$

đó M, N lần lượt là trung điểm của AB và DE)

Theo bổ đề các tam giác ABP và PDE là đều và ta có  $\widehat{ABP} = \widehat{PDE} = 60^\circ$ .

Từ đó suy ra đường chéo CF tạo với AD hoặc tạo với BE một góc lớn hơn hoặc bằng  $60^\circ$ .

**0,5đ**

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử rằng  $\widehat{AQF} \geq 60^\circ$ , trong đó Q là giao điểm của CF và AD.

Lập lại lập luận như trên ta có kết luận AQF và CQD là những tam giác đều, điều đó kéo theo  $\widehat{BRC} = \widehat{ERF} = 60^\circ$ , trong đó R là giao điểm CF và BE.

Lập luận tương tự cho lần thứ ba này ta có các tam giác BCR

và EFR là đều. Vậy ta có tất các góc của lục giác lồi là bằng nhau và bằng  $120^\circ$ .

**0,5đ**

### B. HƯỚNG DẪN CHẤM

1. Điểm toàn bài cho theo thang điểm 20, là tổng điểm của thành phần cộng lại và không làm tròn số.

2. Cặp giám khảo có thể chia nhỏ điểm thành phần để chấm. Điểm thành phần nhỏ nhất 0,5đ.

3. Học sinh có thể làm cách khác với đáp án vẫn cho điểm tối đa.