SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐĂKLĂK

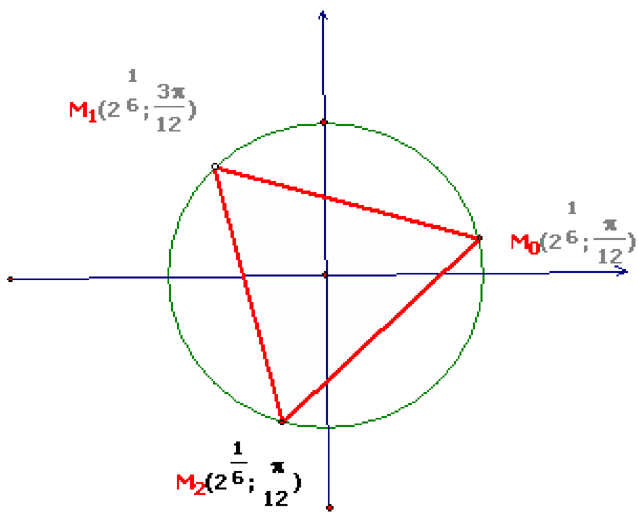
TRƯỜNG THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG

****

HÀ DUY NGHĨA

CHUYÊN ĐỀ

SỐ PHỨC
VÀ ỨNG DỤNG
ĐỂ GIẢI TOÁN SƠ CẤP



Krông pắc, Tháng 12 năm 2010

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Số phức có vai trò quan trọng trong toán học, gần như trường số phức thỏa mãn các yêu cầu của toán học, chính vì thế mà mặc dù gọi là số ảo nhưng trường $\mathbb{C}$ đóng vai trò quan trọng trong đời sống thực của chúng ta. Đặc biệt ở cấp THPT nó có rất nhiều ứng dụng để dễ dàng tiếp cận các bài toán sơ cấp khó, vì vậy trong những năm gần đây Bộ giáo dục đã đưa vào chương trình giảng dạy ở cấp phổ thông.

Nhằm mục đích giới thiệu đến quý thầy cô giáo, và các em học sinh một cách chi tiết hơn về số phức, cách tiếp cận cũng như ứng dụng của nó trong việc giải các bài toán ôn thi đại học, các bài toán trong kỳ thi Olympiad quốc gia và quốc tế, nên tôi đã viết chuyên đề này.

Bài viết được tham khảo trên tài liệu chính [2] "***Complex Number from A to... Z***" của các tác giả **Titu Andreescu, Dorinandrica**, được trình bày ngắn gọn với hai chương cùng với phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo.

Cụ thể ở mỗi chương như sau:

Chương I: Giới thiệu về tập số phức, chứng minh trong tập số phức này có các phép toán cộng nhân như trên tập các số thực, đồng thời giới thiệu các dạng biểu diễn của nó cũng như các tính chất đặc trưng trong từng dạng.

Chương II: Gồm hai phần chính, phần 1 là giới thiệu các bài toán liên quan đến số phức nhằm giúp mọi người làm quen các kỷ thuật tính toán trên trường số phức.Phần hai là ứng dụng của số phức trong việc giả các bài toán sô cấp từ lượng giác đến hình học, bất đẳng thức,...

Mặc dù đã rất cố gắng nghiên cứu tìm hiểu tài liệu và bằng nhưng kinh nghiệm giảng dạy của mình, trong thời gian ngắn tôi đã hoàn thành bài viết.

Nhưng do năng lực của bản thân và thời gian còn hạn chế nên bài viết không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn để bài viết được hoàn thiện hơn.

Tác giả

Chương 1

XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Trong chương này, phần đầu tôi trình bày cách xây dựng trường số phức, cấu trúc đại số, cấu trúc hình học, dạng lượng giác của số phức. Tham khảo trên tài liệu[1][2].

1.1 Định nghĩa số phức

Xét tập $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\}|x, y \in \mathbb{R}$.

Hai phần tử $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ được gọi là bằng nhau nếu và chỉ nếu

$$(x_1 = x_2, y_1 = y_2)$$

Ta xây dựng phép toán trong $\mathbb{R}^2$ như sau: $\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Phép cộng :$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Phép nhân :$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Định nghĩa 1.1.1. Tập $\mathbb{R}^2$ cùng với hai phép toán cộng và nhân được định nghĩa như trên gọi là tập số phức $\mathbb{C}$, phần tử $(x, y) \in \mathbb{C}$ là một số phức.

Định lý 1.1.2. $(\mathbb{C}, +, .)$ *là một trường(nghĩa là trên*$\mathbb{C}$ *với các phép toán đã định nghĩa có các tính chất tương tự trên*$\mathbb{R}$ *với các phép toán cộng nhân thông thường)*

Chứng minh. Để chứng minh $(\mathbb{C}, +, .)$ là trường ta chứng minh các vấn đề sau.

(i) ***Phép cộng có tính giao hoán*** :$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ ta có $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1$.

(ii) ***Phép cộng có tính kết hợp*** :

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C} \text{ ta có}$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = z_1 + (z_2 + z_3).$$

(iii) ***Tồn tại phần tử không*** $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$.

Thật vậy ta có:$\forall z = (x, y) \in \mathbb{C}, z + 0 = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z$.

(iv) ***Tồn tại phần tử đối*** $\forall z = (x, y), \exists - z = (-x, -y)$ là phần tử đối. Thật vậy $z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$.

(v) ***Phép nhân có tính chất giao hoán*** $\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$,

ta có: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, (x_1 y_2 + x_2.y_1) = (x_2 x_1 - y_2.y_1, (x_2 y_1 + x_1 y_2) = z_2.z_1$.

(vi) ***Phép nhân có tính chất kết hợp***

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ ta có:

$$(z_1 z_2) z_3 = (x_1.x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_3, y_3)$$
$$= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2 + y_1 x_2.) y_3, (x_1.x_2 - y_1 y_2) y_3 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) x_3)$$
$$= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3)$$

Tương tự ta cũng có :

$$z_1(z_2 z_3) = (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 x_3; x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3)$$

điều này chứng tỏ :$(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$

(vii) ***Phép nhân phần tử đơn vị*** Tồn tại phần tử đơn vị $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$

Thật vậy ta có : $\forall z_1 = (x, y) \in \mathbb{C}, 1.z = (1, 0)(x, y) = (1x - 0y, 1y + 0.x) = (x, y)$

$$= (x, y)(1, 0) = z.1 = z.$$

$(viii)$ ***Tồn tại phần tử nghịch đảo***, $\forall z_1 = (x, y) \in \mathbb{C}, z \neq 0$, phần tử nghịch đảo của z là $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

(ix) ***Phép nhân phân phối với phép cộng***

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ ta có:

$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3) &= (x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3) \\ &= (x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3); x_1(y_2+y_3) + y_1(x_2+x_3)) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\ &= z_1z_2 + z_1z_3 \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được $(\mathbb{C}, +, .)$thỏa mãn các tiên đề của trường. Do đó $(\mathbb{C}, +, .)$ là một trường số. □

Có rất nhiều cách biểu diễn của số phức trên, mà mỗi cách có thể khác thác được một số tính chất đặc biệt các nhau của tập $\mathbb{C}$, sau đây tôi giới thiệu một số cách biểu diễn đó.

1.2 Dạng đại số của số phức

1.2.1 Xây dựng số i

Xét tương ứng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}, f(x) = (x, 0)$

Dễ dàng chứng minh được f là ánh xạ và là một song ánh.

Ngoài ra ta cũng có:$(x,0) + (y,0) = (x+y,0), (x,0)(y,0) = (xy,0)$, vì f là song ánh nên ta có thể đồng nhất $(x, 0) = x$.

Đặt $i = (0, 1)$, khi đó ta có :$z = (x,y) = (x,0)+(0,y) = (x,0)+(y,0)(0,1) = x + yi = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$. Từ đó ta có kết quả sau:

Mệnh đề 1.2.1. *Mỗi số phức tùy ý $z = (x, y)$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$z = x + yi$$

với x, y là những số thưc tùy ý, và trong đó hệ thức $i^2 = -1$.

Hệ thức $i^2 = -1$ suy trực tiếp từ phép nhân hai số phức

$$i^2 = ii = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

Biểu thức $x + yi$ gọi là dạng đại số của số phức $z = (x, y)$., Vì vậy ta có thể viết $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$và từ bây giờ ta ký hiệu cho số phức $z = (x, y) = x + yi$ và ta có các khái niệm liên quan sau đây:

$x =$Rez gọi là phần thực của số phức z

$y =$Imz gọi là phần ảo của số phức z

i gọi là đơn vị ảo.

Nếu số phức có phần thực $x = 0$ gọi là thuần ảo.

Hai số phức z_1, z_2 gọi là bằng nhau nếu Re(z_1) = Re(z_2) và Im$(z - 1)$=Im(z_2).

Số phức $z \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu Im$(z) = 0$.

Số phức $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ nếu Im$(z) \neq 0$.

1.2.2 Các phép toán trên dạng đại số

Tương tự, ta cũng định nghĩa phép toán cộng và nhân như sau

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

(i)***. Phép cộng*** Tổng của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, là một số phức z được xác định :

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Kí hiệu $z = z_1 + z_2$.

(ii)***.Phép nhân*** Tích của hai số $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là một số phức z được xác định bởi:

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Kí hiệu $z = z_1 z_2$. Định nghĩa này trùng với định nghĩa các phép toán trên $\mathbb{C}$ ở phần trước.

1.2.3 Số phức liên hợp và Môđun của số phức

Định nghĩa 1.2.2. Cho số phức $z = x + iy$, số phức có dạng $x - iy$ được gọi là số phức liên hợp của số phức z, kí hiệu là $\overline{z}$, nghĩa là $z = x + yi$ và $\overline{z} = \overline{x + i\,y} \;=\; x - \;i\,y.$

Mệnh đề 1.2.3. .

1. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
2. $z = \overline{\overline{z}}$
3. $z.\overline{z}$ *là số thực không âm.*
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
5. $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1 z_2}$
6. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}, z \in \mathbb{C}^*$
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_1}}, z_2 \in \mathbb{C}^*$

Chứng minh. .

1. Ta có:$z = \overline{z}$ nên suy ra $x + yi = x - yi \Rightarrow 2yi = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = x \in \mathbb{R}$.
2. Ta có$\overline{z} = x - yi, \Rightarrow \overline{\overline{z}} = x + yi = z$.
3. Ta có :$z.\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \leq 0$
4. Ta có$\overline{z_1 + z_1} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$
$$= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2)i = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

5. Ta có$\overline{z_1 z_1} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$= (x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i) = \overline{z_1}\overline{z_2}.$$

6. Ta có:$z\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \overline{\left(z\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} \Rightarrow \overline{z}\overline{\frac{1}{z}} = 1 \Rightarrow \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

7. Ta có : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1.\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1}\overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1}\frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$

□

Định nghĩa 1.2.4. Cho số phức $z = x + iy$ khi đó $\sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là modulus (trị tuyệt đối) của số phức z ký hiệu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Mệnh đề 1.2.5. .

1. $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|, -|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$

2. $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

3. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

4. $z.\overline{z} = z^2$

5. $|z_1.z_2| = |z_1||z_2|$

6. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

7. $\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}, z \in \mathbb{C}^*$

8. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \in C^*$

9. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1 + z_2|$

10. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1| + |z_2|\right).$

Chứng minh. Các mệnh đề (1-4) Suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

- (5) Ta có $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})) = |z_1|^2|z_2|^2$.

- (6) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$
$= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2$

  Ngoài ra, $\overline{z_1.\overline{z_2}} = \overline{z_1}\overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$

  nên suy ra $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2Re(z-1\overline{z_2})2 \leq |z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|$.

  Do đó
$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$
  Hay
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
  Mặt khác,
$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$$
  Suy ra
$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$$

- (7) Ta có :$z\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow |z|\left|\frac{1}{z}\right| \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ Nên :
$$\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}, z \in \mathbb{C}^*.$$

- (8)$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1\frac{1}{z_2}\right| = \left|z_1{z_2}^{-1}\right| = |z_1||z_2|^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

- (9) Tương tự trong phần (6) ta cũng có :
$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$
  Nên suy ra :
$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$
  Ngoài ra:
$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$$

- (10) Ta có:

$$\begin{aligned}
\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2 &= \left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\\
&= \left|z_1\right|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+\left|z_2\right|^2\\
&= \left|z_1\right|^2-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+\left|z_2\right|^2\\
&= 2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right).
\end{aligned}$$

□

1.3 Dạng lượng giác của số phức

Ở dạng này cho ta thấy tính chất đặc biệt về lũy thừa của một số phức thông qua định lý Moiver.

1.3.1 Tọa độ cực của số phức

Trong mặt phẳng Oxy cho (x, y) khác gốc tọa độ.

Số thực $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là bán kính cực của điểm M, số đo $\theta \in [0, 2\pi)$ của góc lượng giác $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ gọi là argument của M, cặp có thứ tự (r, θ) gọi là tọa độ cực của điểm M, viết $M(r, \theta)$.

Chý ý : Ánh xạ $h : R \times R\backslash(0,) \to (0, \infty) \times [0, 2\pi)$,

$h(x, y) \to (r, \theta)$ là một song ánh.

Điểm gốc O là điểm duy nhất có $r = 0, \theta$ không xác định.

Mỗi điểm M trong mặt phẳng có duy nhất điểm $P(1, \theta)$ là giao điểm của tia OM với đường tròn đơn vị tâm O, sử dụng định nghĩa sin và cosin ta thấy:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

Ngoài ra ta cũng có thể định nghĩa argument của số phức z như sau:

$$\forall z \neq 0, \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}z}{|z|}, \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}z}{|z|}$$

1.3.2 Biểu diễn lượng giác của số phức

Cho số phức $z = x = yi$ ta có thể viết z dưới dạng cực: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Đặt $\alpha = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,khi đó $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Tức là với số phức z bất kỳ ta luôn viết được dưới dạng

$$z = r(\cos t + i\sin t), r \geq 0, t \in \mathbb{R}$$

1.3.3 Phép toán trong dạng lượng giác của số phức

Cho hai số phức $z_1, z_2 \neq 0$, có biểu diễn dạng lượng giác

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i\sin t_1), z_2 = r_2(\cos t_2 + i\sin t_2)$ khi đó :

Hai số z_1, z_2 gọi là bằng nhau nếu nếu $r_1 = r_2$ và $t_2 - t_1 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tích hai số phức $z_1.z_2$ là số phức được xác định :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)\right).$$

Định lý 1.3.1. *(De Moivre), Cho $z = r(\cos t + i\sin t)$ và $n \in \mathbb{N}$, khi đó ta có*

$$z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$$

Chú ý : Công thức De Moivre vẫn đúng cho lũy thừa nguyên âm

Ngoài ra $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ còn được biểu diễn dưới dạng $z = re^{i\theta}$ gọi là biểu diễn số phức dưới dạng mũ.

Mệnh đề 1.3.2. *Với mọi $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ ta có:*

1. $e^{i\phi_1}e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1+\phi_2)}$
2. $e^{i(\phi+2\pi)} = e^{i\phi}$
3. $\overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}$
4. $|e^{i\phi}| = 1$

Chứng minh. Đối với mệnh đề (1),(2),(4) suy ra trực tiếp từ định nghĩa và tính chất của lũy thừa. Ta chứng ming cho mệnh đề (3). Ta có :

$$\begin{aligned}\overline{e^{i\phi}} &= \overline{cos(\phi) + isin(\phi)} \\ &= cos(\phi) - isin(\phi) = cos(-\phi) + isin(-\phi) \\ &= e^{-i\phi}.\end{aligned}$$

□

1.4 Căn bậc n của đơn vị và biểu diễn hình học của số phức

1.4.1 Căn bậc n của số phức

Định nghĩa 1.4.1. Cho số phức $w \neq 0$ và số nguyên $n \geq 2$. Khi đó nghiệm z của phương trình $z^n - w = 0$ là căn bậc n của số phức z

Mệnh đề 1.4.2. *Cho số phức $w = r(cos(\theta) + isin(\theta))$, với $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ Khi đó căn bậc ncủa số phức w gồm n số phân biệt xác định bởi :*

$$z_k = \sqrt[n]{r}(cos(\theta + \frac{2k\pi}{n}) + isin(\theta + \frac{2k\pi}{n})), k = 1, 2, ..., n - 1.$$

Chứng minh. Xét dạng lượng giác của số phức $z = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$ khi đó

$$z^n = \rho^n(cosn\varphi + i.sinn\varphi)$$

Ngoài ra ta có $z^n = w$ nên ta suy ra:$\rho^n(cosn\varphi + isinn\varphi) = r(cos(\theta) + isin(\theta))$.
Do đó:$\rho^n = r, n\varphi = \theta a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Vậy nghiệm của phương trình $z^n - w = 0$ có dạng:

$$z_k = \sqrt[n]{r}(cos\varphi_k + isin\varphi_k), k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_{n-1} < 2\pi$ nên $\varphi, k \in \{0, 1, ..., n - 1\}$ là argument cực. Bởi tính duy nhất của tọa độ cực ta ruy ra phương trình có n nghiệm $\{z_0, z_1, ..., z_n\}$ Mặt khác với số nguyên k tùy ý, gọi $r \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$

là hệ thặng dư theo modun n (nghĩa là chia k cho n ta được các số dư $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$.)

Khi đó $\varphi_k = \frac{\theta}{n} + (nq+r)\frac{2\pi}{n} = \varphi_r + 2\pi q$.

Điều này suy ra :$z_k = z_r$ hay $\{z_k, k \in \mathbb{Z} = \{z_0, z_1, ..., z_{n-1}\}, \}$. □

Định nghĩa 1.4.3. Nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$ Gọi là căn bậc n của đơn vị.

Từ định nghĩa ta thấy rằng căn bậc n của đơn vị là:

$$\omega_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, .., n-1$$

Người ta ký hiệu cho tập các căn bậc n của đơn vị là $U_n = \{1, \omega, \omega^2, ...\omega^{n-1}\}$ *(U_n là nhóm nhân cyclic cấp n.)*

Số $\omega_k \in U_n$ gọi là căn nguyên thủy bậc n của đơn vị nếu mọi số nguyên dương $m < n$ ta có $\omega_k^m \neq 1$.

1.4.2 Biểu diễn hình học của số phức

Định nghĩa 1.4.4. Điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy gọi là điểm biểu diễn hình học của số phức $z = x + yi$.

Số phức $z = x + yi$ gọi là tọa độ phức của điểm $M(, y)$, ta dùng ký hiệu M(z) để chỉ tọa độ phức của điểm M là z

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức như trên gọi là mặt phẳng phức.

Ngoài ra, trên mặt phẳng phức người ta cũng đồng nhất số phức $z = x = yi$ với $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}, M(x; y)$

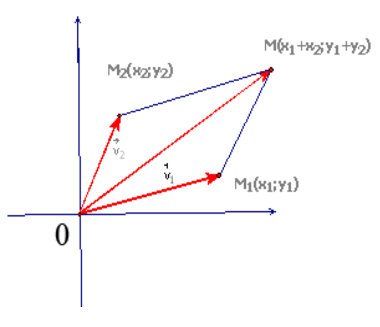
Định nghĩa 1.4.5. Cho số phức $z = x + yi$ có biểu diễn hình học là $M(z)$, khi đó khoảng cách từ $M(z)$ đến O là Môđun của số phức z

Xét hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ và các véc tơ tương ứng $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, khi đó :

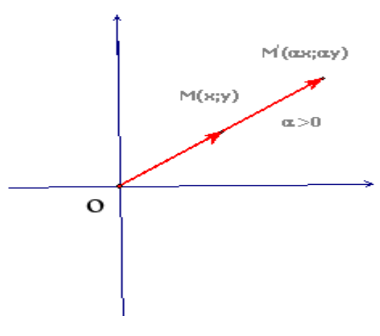
- Tổng hai số phức : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)i$
- Tổng hai véctơ :$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$ Qua biểu diễn ta thấy tổng hai số phức$z_1 + z_2$ tương ứng với tổng hai véc tơ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
- Hiệu hai số phức :$z_1 - z_2 = (x_1 + x_2)i - (y_1 + y_2)i$
- Hiệu hai véctơ :$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$
- Khoảng cách hai điểm $M_1(x-1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ bằng mô đun của số phức $z_1 - z_2$ bằng độ dài của $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

$$M_1M_2 = |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Nếu λ là số thực thì tích $\lambda.z = \lambda x + \lambda yi$ tương ứng với véctơ $\lambda\vec{v} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$.
- Tích của hai số phức $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1), z_2 = r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$. và gọi $M_1(r_1, \theta_1), M(r_2, \theta_2)$ là tọa độ cực tương ứng của điểm M_1, M_2, gọi P_1, P_2 là giao điểm của đường tròn $\mathscr{C}(O, 1)$ với tia OM_1, OM_2.Dựng P_3 thuộc đường tròn có argument cực $\theta_1 + \theta_2$ chọn M_3 thuộc tia OP_3 : $OM_3 = OM_1.OM_2$ gọi z_3 là tọa độ phức của điểm M_3 khi đó $M_3(r_1r_2, \theta_1 + \theta_2)$ là điểm biểu diễn của tích $z_1.z_2$



Hình 1.1: Biểu diễn tổng hai số phức



Hình 1.2: Biểu diễn tích một số thực dương và một số phức

Chú ý: $i)$ Với số thực dương r tập hợp các số phức với Môđun r biểu diễn trên mặt phẳng phức là đường tròn $\mathfrak{C}(O, r)$

(ii) Các số phức $\{z, |z| < r\}$ là các điểm nằm trong đường tròn $\mathfrak{C}(O, r)$.

(iii) Các số phức $\{z, |z| > r\}$ là các điểm nằm ngoài đường tròn $\mathfrak{C}(O, r)$

Mệnh đề 1.4.6. *Biểu diễn hình học của các căn bậc $n > 2$ của $w \neq 0$ là đỉnh của n giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{r}, r = |w|$.*

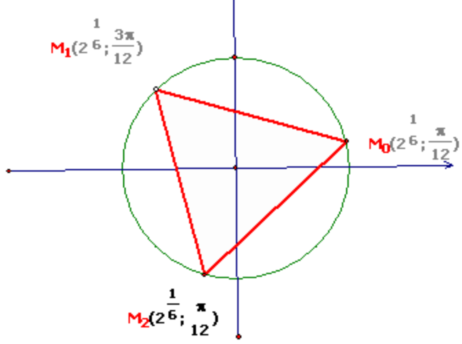
Chứng minh. Gọi các điểm biểu diễn của các số phức $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ trên mặt phẳng phức là $M_0(z_0), M_1(z_1), ..., M_{n-1}(z_{n-1})$.Khi đó ta có :

$$OM_k = |z_k| = \sqrt[n]{r}, k \in \{0, 1, .., n-1\}$$

Suy ra $M_k \in C(0, \sqrt[n]{r})$. Mặt khác, số đo cung cung $\widetilde{M_k M_{k+1}}$ bằng :

$$\arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{\theta + 2(k+1)\pi - (\theta + 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n}, k \in \{0, 1, .., n-2\}$$

Cung còn lại có số đo được xác định như sau :$sd\widetilde{M_{n-1}M_0} = 2\pi - (n-1)\frac{2\pi}{n}$
Từ đó suy ra các cung trên có số đo bằng nhau, hay đa giác$M_0 M_1 ... M_{n-1}$ đều. □



Hình 1.3: Biểu diễn các căn bậc 3 của số phức z=1+i

Định lý 1.4.7. *1. Nếu $n\,|_q$ thì nghiệm bất kỳ của phương trình $z^n - 1 = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $z^q - 1 = 0$*

2. Các nghiệm chung của phương trình $z^m - 1 = 0$ và $z^n - 1 = 0$ là các nghiệm của phương trình $z^d = 0, d = UCLN(m, n)$.

3. Các căn bậc n nguyên thủy của đơn vị là

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i.\sin\frac{2k\pi}{n}, 0 \leqslant k \leqslant m, UCLN(k, n) = 1$$

Chứng minh. Xem trong tài liệu ([2],p 45-46) □

1.5 Tích thực của hai số phức

Như ta đã biết tích vô hướng hai véctơ là một số thực, trong phần này tôi sẽ giới thiệu khái niệm tương tự cho tích hai số phức.

Định nghĩa 1.5.1. Tích thực của hai số phức a và b là một số xác định bởi

$$a.b = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \overline{a}b)$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra trực tiếp mệnh đề sau

Mệnh đề 1.5.2. *Cho các số phức a, b, c, z, cá mệnh đề sau đây là đúng.*

1. $a.a = |a|^2$
2. $a.b = b.a$
3. $a.(b + c) = a.b + a.c$
4. $(\alpha a) = \alpha(a.b) = a(\alpha b)\forall\alpha \in \mathbb{R}$
5. $a.b = 0$ *nếu và chỉ nếu* $OA \perp OB$ *với* $A(a), B(b)$
6. $(az).(bz) = |z|^2(a.b)$

Mệnh đề 1.5.3. *Giả sử rằng $A(a), B(b), C(c)$văn$D(d)$ là bốn điểm rời nhau. Các mệnh đề sau đây là tương đương:*

1. $AB \perp CD$
2. $(b-a)(c-d) = 0$
3. $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}^*$

Chứng minh. Lấy điểm $M(b-a), N(d-c)$ ta được tứ giác $OAMB, OCDN$ là hình bình hành, khi đó ta có $AB \perp CD$ nếu và chỉ nếu $OM \perp ON$ Mà, $m.n = (b-a)(d-c) = 0$ nên theo tính chất 5 của mệnh đề trên ta suy ra điều phải chứng minh. 2) $\Leftrightarrow$ 3) suy trực tiếp từ từ định nghĩa. □

Chương 2

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ PHỨC

Trong chương này ta sẽ làm quen với các bài toán liên quan đến số phức. Áp các phép toán của số phức để giải các bài toán cổ điển các bài toán thi IMO. Tham khảo trên tài liệu [2].

2.1 Dạng 1: Tính toán, biến đổi trên trường số phức

Bài tập 2.1.1. Cho a là số thực dương và đặt

$$M_0 = \left\{ z \in \mathbb{C}^*, \left| z + \frac{1}{z} \right| = a \right\}$$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z|$ khi $z \in M_0$

Lời giải

Ta có $a^2 = |z + \frac{1}{z}|^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{|z|^4 + (z+\overline{z})^2 - 2|z|^2 + 1}{|z|^2}$
Điều này suy ra:

$$|z|^4 - |z|^2\left(a^2+2\right) + 1 = -(z+\overline{z})^2 \leqslant 0$$

Do đó

$$|z|^2 \in \left[\frac{a^2+2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2}; \frac{a^2+2+\sqrt{a^4+4a^2}}{2}\right]$$

Suy ra

$$|z| \in \left[\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}; \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$$

Vậy

$$\max|z| = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}; \min|z| = \frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}, z \in M_0, z = \overline{z}$$

Bài tập 2.1.2. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{7}{2}} \leqslant |1+z| + \left|1-z+z^2\right| \leqslant 3\sqrt{\frac{7}{6}} \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1$$

Lời giải

Đặt $t = |z+1| \Rightarrow t \in [0;2]$

khi đó $t^2 = (1=z)(1+\overline{z}) = 2 + 2Re(z) \Rightarrow Re(z) = \frac{t^2-2}{2}$

Xét hàm số

$$f : [0;2] \longrightarrow \mathbb{R}, f(t) = t + \sqrt{|7-2t^2|}$$

Ta có:

$$f(\sqrt{\frac{7}{2}}) = \frac{7}{2} \leq t + \sqrt{|7-2t^2|} \leq f(\sqrt{\frac{7}{6}}) = 3\sqrt{\frac{7}{6}}.$$

Ngoài ra, $|1+z| + |1+-z+z^2| = t + \sqrt{|7-2t^2|}$.

Vậy $\sqrt{\frac{7}{2}} \leqslant |1+z| + \left|1-z+z^2\right| \leqslant 3\sqrt{\frac{7}{6}}, \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1$.

Bài tập 2.1.3. Giải phương trình: $z^3 = 18 + 26i, z = x + yi, x, y \in \mathbb{Z}$

Ta có: $(x+yi)^3 = (x+yi)^2(x+yi) = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$

Suy ra:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}$$

Đặt $y = tx$ từ hệ trên ta suy ra

$$18(3t - t^3)) = 26(1 - 3t^2), x.y \neq 0$$

$$(3t-1)(3t^2 - 12t - 13) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}(t \in \mathbb{Q})$$

Với $x = 3y$ thay vào phương trình $x^3 - 3xy = 18$ ta được:

$$x = 3, y = 1.$$

Bài tập 2.1.4. Cho p, q là hai số phức, $q \neq 0$. Chứng minh rằng nếu các nghiệm phương trình bậc hai $x^2 + px + q = 0$ có môđun bằng nhau thì $\frac{p}{q}$ là số thực.

(1999 Romanian Mathematical Olympiad-Final Round)

Lời giải

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình và $r = |x_1| = |x_2|$ khi ddos ta có:

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{(x_1+x_2)^2}{x-1.x_2} = \frac{x_1}{x-2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = \frac{x_1.\overline{x_2}}{r^2} + \frac{x_2.\overline{x_1}}{r^2} + 2 = 2 + \frac{2}{r^2}Re(x_1.\overline{x_2})$$

Do đó $\frac{p^2}{q^2}$ là một số thực. Ngoài ra, $Re(x_1.\overline{x_2}) \geq -|x_1.\overline{x_2}| = r^2$ suy ra $\frac{p^2}{q^2} \geq 0$. Vậy $\frac{p}{q}$ là số thực.

2.2 Dạng 2:ứng dụng số phức trong việc giải toán sơ cấp

Bài tập 2.2.1. Chứng minh công thức lượng giác sau:

$$sin5t = 16sin^5t - 20sin^3t + 5sint \tag{2.1}$$

$$cos5t = 16cos^5t - 20cos^t + 5cost \tag{2.2}$$

Lời giải

áp dụng công thức Moiver ta có : $(cost + isint)^5 = cos5t + i.sin5t$

Ngoài ra theo khai triển nhị thức:

$$\begin{aligned}(cost+isint)^5 &= cos^5t + 5icos^4tsint + 10i^2cos^3tsin^2t \\ &\quad +10i^3cos^2tsin^3t + 5i^4costsin^4t + i^5sin^5t \\ &= cos^5t - 10cos^3t(1-cos^2t) + 5cost(1-cos^2t)^2 \\ &\quad +i(sin^2t(1-sin^2t)^2 - 10(1-sin^2t)sin^3t + sin^5t)\end{aligned}$$

Đồng nhất phần thực, phần ảo hai biểu thức trên ta được điều phải chứng minh.

Phần (2.2) tương tự.

Bài tập 2.2.2. Chứng minh rằng $cos\frac{\pi}{7} - cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

(International Mathematical Olympiad -Poland 1963)

Lời giải

Xét phương trình $x^7+1=0$. Dễ thấy các nghiệm của phương trình là các căn bậc 7 của số -1. Tức là tập nghiệm của phương trình là: $\{e^{\frac{i\pi}{7}}, e^{\frac{i3\pi}{7}}, ..., e^{\frac{i13\pi}{7}}\}$ Mặt khác $e^{\frac{i\pi}{7}} + e^{i\frac{3\pi}{7}} + ... + e^{i\frac{13\pi}{7}} = e^{\frac{i\pi}{7}}\frac{(e^{\frac{i2\pi}{7}})^7-1}{e^{\frac{i\pi}{7}}} = 0$ nên tổng phần thực của nó bằng không. Do đó

$$cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7}+cos\frac{7\pi}{7}+cos\frac{9\pi}{7}+cos\frac{11\pi}{7}+cos\frac{13\pi}{7}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7})-1=0$$

$$\Leftrightarrow cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

Bài tập 2.2.3. Chứng minh bất đẳng thức quen thuộc sau:

1. $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z)$,

$$\forall x, y, z > 0$$

2. $\sqrt{4cos^2xcos^2y+sin^2(x-y)}+\sqrt{4sin^2xsin^2y+sin^2(x-y)} \geq 2)$,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

Lời giải

1.Đặt $z_1 = x+\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}yi, z_2 = y+\frac{z}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}zi, z_3 = z+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}xi$
khi đó ta có:

$$|z_1| = \sqrt{x^2+xy+y^2}, |z_2| = \sqrt{y^2+yz+z^2}, |z_3| = \sqrt{z^2+zx+x^2}$$

$$|z_1+z_2+z_3| = \sqrt{3}(x+y+z)$$

áp dụng công thức 6 của Mệnh đề 1.2.5 ta được: $|z_1+z_2+z_3| \leq |z_1|+|z_2|+|z_3|$
Suy ra:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z).$$

2.Tương tự: Đặt $z_1 = 42cosxcosy + isin(x-y), z_2 = 2sinxsiny + isin(x-y)$
Ta suy ra điều chứng minh.

Bài tập 2.2.4. Chứng minh đẳng thức tổ hợp quen thuộc sau:

$$C_{2011}^0 + C_{2011}^3 + C_{2011}^6 + ... + C_{2011}^{2010} = \frac{2^{2011}+1}{3}$$

Lời giải

Gọi ω là căn bậc nguyên thủy bậc 3 của đơn vị, tức là $\omega^3 = 1, \omega = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}$ khi đó ta có $1+\omega+\omega^2 = 0$ và $\begin{cases} \omega^{3n} = 1 \\ \omega^{3n+1} = \omega \quad , n \in \mathbb{N} \\ \omega^{3n+2} = \omega^2 \end{cases}$
Khai triển các nhị thức Newton $(1+1)^{2011}, (1+\omega)^{2011}, (1+\omega^2)^{2011}$ ta được:

$$(1+1)^{2011} = C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + C_{2011}^2 + ... + C_{2011}^{2010} + C_{2011}^{2011}$$

$$\begin{aligned}(1+\omega)^{2011} &= C_{2011}^0 + C_{2011}^1\omega + C_{2011}^2\omega^2 + ... + C_{2011}^{2010}\omega^{2010} + C_{2011}^{2011}\omega^{2011} \\ &= C_{2011}^0 + C_{2011}^1\omega + C_{2011}^2\omega^2 + ... + C_{2011}^{2010} + C_{2011}^{2011}\omega \\ (1+\omega)^{2011} &= C_{2011}^0 + C_{2011}^1\omega^2 + C_{2011}^2\omega + ... + C_{2011}^{2010} + C_{2011}^{2011}\omega^2\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các số hạng của 3 tổng trên ta được:

$$3\left(C_{2011}^0 + C_{2011}^3 + ... + C_{2011}^{2010}\right) = (1+1)^{2011} + (1+\omega)^{2011} + (1+\omega^2)^{2011}.$$

Ngoài ra,

- $(1+1)^{2011} = 2^{2011}$
- $(1+\omega)^{2011} = \left(1 + cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)^{2011} = \left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)^{2011}$
$= cos\frac{2011\pi}{3} + isin\frac{2011\pi}{3} = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}$

- $\left(1+\omega^2\right)^{2011} = \left(1+cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right)^{2011} = \left(cos\frac{\pi}{3}-isin\frac{\pi}{3}\right)^{2011}$
$= cos\frac{2011\pi}{3} - i.sin\frac{2011\pi}{3} = cos\frac{\pi}{3} - isin\frac{\pi}{3}$

Do đó:$(1+1)^{2011} + (1+\omega)^{2011} + (1+\omega^2)^{2011} = 2^{2011} + 2cos\frac{\pi}{3} = 2^{2011}+1$

Từ trên suy ra

$$C_{2011}^0 + C_{2011}^3 + C_{2011}^6 + ... + C_{2011}^{2010} = \frac{2^{2011}+1}{3}$$

Bài tập 2.2.5. Tìm tất cả các nghiệm thực dương của phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x}(1+\dfrac{1}{x+y}) = 2 \\ \sqrt{7y}(1-\dfrac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

1996 Vietnamese Mathematical Olympiad

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{x}, v=\sqrt{y}$ khi đó hệ trên trở thành:

$$\begin{cases} u\left(1+\dfrac{1}{u^2+v^2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ v\left(1-\dfrac{1}{u^2+v^2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Nhưng u^2+v^2 là bình phương của môđun số phức $z=u+iv$ nên ta nhân 2 vế của phương trình thứ 2 của hệ với i và cộng hai phương trình lại ta được:

$$u+iv+\frac{u-iv}{u^2+v^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$$

Mặt khác ta có:$\frac{u-iv}{u^2+v^2} = \frac{1}{z}$nên phương trình trên trở thành:

$$z+\frac{1}{z} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$$

Tức là z là nghiệm của phương trình

$$z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)z+1=0$$

Suy ra
$$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 + i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}\right)$$
$$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 + i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2}\right)$$
Điều này suy ra nghiệm thực dương của hệ là
$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2; \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}\right)^2\right), \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2; \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2}\right)^2\right).$$

Bài tập 2.2.6. Hai đa giác đều nội tiếp trong đường tròn. Đa giác thứ nhất có 2010 cạnh, đa giác thứ 2 có 2015 cạnh. Giả sử hai đa giác có đỉnh chung tùy ý nào đó hãy tìm số đỉnh chung của hai đa giác đó.

Lời giải

Như đã nói ở trên, số đỉnh của chung của hai đa giác là số nghiệm chung của hai phương rình $z^{2010} = 1, z^{2222} = 1$ áp dụng Định lý1.4.7 ta có số nghiệm chung là $d = UCLN(2010, 2015) = 5$ Vậy hai đa giác có 5 đỉnh chung.

Bài tập 2.2.7. Cho $P_0P_1...P_{n-1}$ là đa giác đều nội tiếp trong đường trò bán kính bằng 1. Chứng minh

1. $P_0P_1.P_0P_2.....P_0P_{n-1} = n;$
2. $sin\frac{\pi}{n}.sin\frac{2\pi}{n}....sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$
3. $sin\frac{\pi}{n}.sin\frac{3\pi}{n}....sin\frac{(2n-1)\pi}{n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

Lời giải

1.Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử các đỉnh của đa giac đều là các điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$, trong đó $P_0 = 1$.

Xét đa thức $f(z) = z^n - 1$ ta có $f'(z) = n.z^{n-1} \Rightarrow f'(1) = n$

Ngoài ra, ta cũng khai triển được

$$f(z) = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)...(z-\omega)^{n-1}, \omega = cos\frac{2\pi}{n} + i.sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\Rightarrow f'(1) = (1-\omega)(1-\omega^2)...(1-\omega^{n-1}).$$

Do đó

$$n = (1-\omega)(1-\omega^2)...(1-\omega^{n-1})$$

Lấy môđun hai vế ta được kết quả cần chứng minh.

2. Ta có

$$\begin{aligned} 1-\omega^k &= 1 - cos\tfrac{2k\pi}{n} - i.sin\tfrac{2k\pi}{n} = 2sin^2\tfrac{k\pi}{n} - 2isin\tfrac{k\pi}{n}.cos\tfrac{k\pi}{n} \\ &= 2sin\tfrac{k\pi}{n}(sin\tfrac{k\pi}{n} - icos\tfrac{k\pi}{n}). \end{aligned}$$

Do đó $|1-\omega|^k = 2sin\frac{k\pi}{n}, k = 1, 2, .., n-1$ Theo câu 1 suy ra điều phải chứng minh.

3. Xét đa giác đều $Q_0Q_1...Q_{2n-1}$ nội tiếp trong đường tròn, dễ thấy rằng các đỉnh của nó là các điểm biểu diễn hình học căn bậc$2n$ của đơn vị.Do đó theo câu 1 ta có $Q_0Q_1.Q_0Q_2.....Q_0Q_{2n-1} = 2n$.

Tương tự, đa giác đều $Q_0Q_2...Q_{n-1}$ ta cũng có $Q_0Q_2.Q_0Q_4.....Q_0Q_{2n} = n$ Điều này suy ra $Q_0Q_1.Q_0Q_3.....Q_0Q_{2n-1} = 2$ Tương tự 2 ta cũng có được$Q_0Q_{2k-1} = sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, 2, .., n$ Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Từ bài toán này ta có thể mở rộng thành bài toán tổng quát sau đây.

Bài tập 2.2.8. Cho hàm Euler $\varphi(n)$ [1]Chứng minh rằng:

1. $\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n-1 \\ UCLN(k,n)=1}} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2^{\varphi(n)}}$ trong đó n không là lũy thừa của số nguyên tố.

2. $\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n-1 \\ UCLN(k,n)=1}} \cos\frac{k\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}}{2^{\varphi(n)}}$với mọi số nguyên dương n

[1] $\varphi(n)$ là tập hợp các số nguyên dương không vượt quá n nguyên tố cùng nhau với n

Lời giải

Xem tài liệu ([2],p 50)

Bài tập 2.2.9. Gọi M, N, P, Q, R, S là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA của một lục giác. Chứng minh rằng

$$RN^2 = MQ^2 + PS^2$$

nếu và chỉ nếu $MQ \perp PS$

(Romanian Mathematical Olympiad-Final Round,1994)

Lời giải

Gọi a, b, c, d, e, f là tọa độ các đỉnh của lục giác, khi đó các trung điểm M, N, P, Q, R, S có tọa độ tương ứng là

$$m = \frac{a+b}{2}, n = \frac{b+c}{2}, p = \frac{c+d}{2}$$

$$q = \frac{d+e}{2}, r = \frac{e+f}{2}, s = \frac{f+a}{2}$$

Sử dụng tính chất của tích thực hai số phức, ta có

$$RN^2 = MQ^2 + PS^2$$

$$\Leftrightarrow (e+f-b-c)(e+f-b-c)$$

$$= (d+e-a-b)(d+e-a-a) + (f+a-c-d)(f+a-c-d)$$

$$\Leftrightarrow (d+e-a-b)(f+a-c-d) = 0 \tag{2.3}$$

áp dụng Mệnh đề 1.5.3 ta suy ra (2.3) tương đương $MQ \perp PS$.

.

KẾT LUẬN

Bài viết tuy ngắn nhưng tác giả cũng cố gắng nói lên được ý nghĩa của việc học số phức ở trường phổ thông, cũng như giúp cho mọi người dễ dàng tiếp cận số phức một cách chi tiết hơn.

Trong chuyên đề tiếp theo tôi sẽ giới thiệu chi tiết hơn về "***số phức và hình học***" và ứng dụng của nó đã được thể hiện qua Bài tập 2.2.9.

Tôi mong rằng đây là tài liệu tham khảo bổ ích cho những ai quan tâm đến nó.

Rất mong được sự đóng góp của quý thầy cô và các bạn.

Tài liệu tham khảo

1. Joseph Bak , Donald J.Newman, ***Complex Analysis***

2. Titu Andreescu, Dorinandrica, ***Complex numbers from A to Z***